

# SOLUÇÃO DO MODELO DA CINÉTICA PONTUAL DE NÊUTRONS PELO MÉTODO DE FATOR DE INTEGRAÇÃO ÍMPLÍCITO E DIAGONALIZAÇÃO ESPECTRAL

JAIME CONTE ZANDONÁ; CLAUDIO ZEN PETERSEN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – Jaime.zandona@ufpel.edu.br 1

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) – claudio.petersen@ufpel.edu.br 2

## 1. INTRODUÇÃO

Dentro da teoria de difusão de nêutrons, as equações que governam a dinâmica temporal e espaço-temporal da população de nêutrons são as chamadas equações da cinética. As equações da cinética da teoria da difusão dividem-se em: equações da cinética pontual e equações da cinética espacial.

Neste trabalho dá-se ênfase ao modelo da cinética pontual, que ainda tem um papel relevante em física de reatores na medida em que pode ser utilizado, quando devidamente resolvido, para uma previsão de tempo quase real da potência do reator, o que permite um controle em tempo útil e de intervenção na planta, a fim de evitar a ocorrência de acidentes graves (Petersen, 2011).

Com o passar do tempo, novos modelos, métodos e parâmetros nucleares tem sido propostos, por isso deve-se sempre realizar testes para verificar, tanto a capacidade do modelo, quanto ao do método a ser empregado de prever situações específicas, definindo limites de validade (qualificação do modelo e método). Esses testes são realizados utilizando-se problemas de referência (padrões) em física de reatores chamados de problemas *benchmark* e mais recentemente uma atenção especial tem sido dado ao *Accelerator Driven System* (ADS) (Santos; Cabral; Gonçalves; Duarte, 2011)

Neste sentido, neste trabalho resolvem-se as equações da cinética pontual de nêutrons considerando 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados considerando um termo fonte. Utiliza-se o método de Fator de Integração Implícito (FII) (Medina, 2016), onde a ideia é multiplicar a equação da cinética pontual de nêutrons por um fator de integração tratando a parte não homogênea de forma implícita, construindo um esquema que se baseia em aproximar a exponencial da matriz e o termo fonte através de uma interpolação polinomial por Lagrange.

## 2. METODOLOGIA

Partindo das equações da cinética pontual de nêutrons considerando seis grupos de nêutrons atrasados com fonte externa tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) + S(n(t)) \\ \frac{dC_i(t)}{dt} &= \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad , \end{aligned} \quad (1)$$

com as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} n(0) &= n_0 \\ C_i(0) &= \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} n_0 \quad , \end{aligned} \quad (2)$$

para  $i=1:6$ , na qual,  $n(t)$  é a densidade de nêutrons no tempo  $t$ ,  $C_i(t)$  é a concentração de precursores de nêutrons atrasados para o grupo  $i$  de precursores no tempo  $t$ ,  $\rho(t)$  é a reatividade no instante  $t$ ,  $\beta$  é a fração de nêutrons atrasados,  $\beta_i$  são as frações de nêutrons atrasados para o grupo  $i$  de precursores,  $\lambda_i$  são as

constantes de decaimento para o grupo  $i$  de precursores,  $\Lambda$  é o tempo médio de geração entre o nascimento de nêutron e posterior absorção, e  $S(n(t))$  é o termo fonte podendo representar uma fonte externa de nêutrons.

Reescrevendo a equação (1) na forma matricial, tem-se:

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{y}(t) + \vec{S}(y(t)) \quad , \quad (3)$$

onde

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} n(t) \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_6(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\rho(t)-\beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \cdots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{S}(y(t)) = \begin{pmatrix} S_0(n(t)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Para resolver essa equação utiliza-se o Método de Fator de Integração Implícito (**FII**)(Medina,2016). Sem perda de generalidade, vamos considerar  $\rho(t) = \rho$ , logo a matriz  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ . Assim, tem-se a seguinte equação:

$$e^{-\mathbf{A}t} \frac{d\vec{y}(t)}{dt} = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{A} \vec{y}(t) + e^{-\mathbf{A}t} \vec{S}(y(t)) \quad . \quad (5)$$

Reescrevendo a equação (5) e utilizando a regra do produto, temos:

$$\frac{d(e^{-\mathbf{A}t} \vec{y}(t))}{dt} = e^{-\mathbf{A}t} \vec{S}(y(t)) \quad . \quad (6)$$

Integrando entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , sendo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , em ambos os lados desta equação, fazendo uma mudança de variável,  $\tau = t - t_n$ , tem-se então:

$$e^{-\mathbf{A}t} \vec{y}(t) \Big|_{t_n}^{t_{n+1}} = e^{-\mathbf{A}t_n} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}\tau} \vec{S}(y(t_n + \tau)) d\tau \quad , \quad (7)$$

Aplicando os limites de integração em (7) e organizando a equação, fica-se com:

$$\vec{y}_{n+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \vec{y}_n + e^{\mathbf{A}\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}\tau} \vec{S}(y(t_n + \tau)) d\tau \quad , \quad (8)$$

onde  $\vec{y}(t_n) = \vec{y}_n$ . Queremos tratar a parte não homogênea de forma implícita construindo um esquema que se baseia em aproximar  $e^{-\mathbf{A}\tau} \vec{S}(y(t_n + \tau))$  através de uma interpolação polinomial que envolve  $t_{n+1}$ , definindo

$$G(\tau) = e^{-\mathbf{A}\tau} \vec{S}(y(t_n + \tau)) \quad . \quad (9)$$

Para construir um esquema de integração de ordem  $r$  de erro de truncamento, aproximamos  $G(\tau)$  por um polinômio de Lagrange de ordem  $(r-1)$ , com pontos de interpolação  $t_{n+1}, t_n, \dots, t_{n+2-r}$ . Tem-se então:

$$P(\tau) = \sum_{i=1}^r G((2-i)\Delta t) \prod_{\substack{j=-1 \\ j \neq i}}^{r-2} \frac{\tau - (-j\Delta t)}{(-i\Delta t - (-j\Delta t))} = \sum_{i=1}^{r-2} G((-i)\Delta t) \prod_{\substack{j=-1 \\ j \neq i}}^{r-2} \frac{\tau + j\Delta t}{(j-i)\Delta t} \quad (10)$$

Assim, para o esquema de ordem  $r$ , tem-se:

$$P(\tau) = \sum_{i=1}^{r-2} e^{i\mathbf{A}\Delta t} \vec{S}(y_{n-i}) \prod_{\substack{j=-1 \\ j \neq i}}^{r-2} \frac{\tau + j\Delta t}{(j-i)\Delta t} \quad ; \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t \quad . \quad (11)$$

Portanto, da equação (8), obtem-se o esquema do método **FII** geral como:

$$\vec{y}_{n+1} = e^{A\Delta t} \vec{y}_n + \Delta t \left( \alpha_{n+1} \vec{S}(y_{n+1}) + \sum_{i=0}^{r-2} \alpha_{n-i} \vec{S}(y_{n-i}) \right), \quad (12)$$

onde:

$$\alpha_{n-i} = \frac{e^{(i+1)A\Delta t}}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r-2} \frac{\tau + k\Delta t}{(k-i)\Delta t} d\tau; \quad -1 \leq i \leq r-2. \quad (13)$$

Assim, utilizando o método de Lagrange de segunda ordem, ou seja,  $r=3$ , o que resulta em  $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}$  e  $\alpha_n = \frac{e^{A\Delta t}}{2}$ , logo:

$$\vec{y}_{n+1} = e^{A\Delta t} \left( \underbrace{\vec{y}_n + \frac{\Delta t}{2} \vec{S}(y_n)}_{\text{Termo Explícito}} + \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \vec{S}(y_{n+1})}_{\text{Termo Implícito}} \right). \quad (14)$$

Note que, para resolver a exponencial da matriz utilize-se neste trabalho a aproximação pela decomposição espectral da matriz  $A$ , uma vez que a matriz  $A$  é diagonalizável, então existe uma matriz  $P$  dos autovetores inversível, tal que:

$$A = P\Lambda P^{-1}, \quad (15)$$

onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal dos autovalores da matriz  $A$ ,  $P$  é a matriz associada dos autovetores e  $P^{-1}$  é a matriz inversa dos autovetores da matriz  $A$ , respectivamente. Logo, em vez de determinar  $e^{A\Delta t}$ , avalia-se  $P e^{\Lambda t} P^{-1}$ .

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste trabalho para fins de verificação da metodologia foram realizados dois casos testes. No primeiro foram considerados dois valores constantes da reatividade para quatro tempos distintos, afim de verificar a validade da metodologia. Já para o segundo caso teste foi considerado uma reatividade constante e duas fontes externas constantes e é apresentada em forma gráfica.

Para ambos casos foram utilizados os parâmetros cinéticos estudados em (Tumelero, 2016). Considera-se a densidade de nêutrons inicial como  $n_0 = 1 \text{ cm}^{-3}$ . Para o primeiro caso teste os resultados obtidos pelo método de Fator de Integração Implícito (**FII**) são comparados com dois métodos: o Método de Aproximação Polinomial (PAM) presente em (Tumelero, 2016) e o Método Backward Euler Finite Difference (BEFD) presente em (Ganapol, 2013). Os resultados para esse caso teste são apresentados na Tabela 1.

Reatividade	t (s)	FII	PAM $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$	BEFD
$\rho = -0,5 \beta$	0,1	<b>0,6989252256</b>	0,698925094	0,6989252256
	1	<b>0,6070535656</b>	0,607053566	0,6070535656
	10	<b>0,3960776907</b>	0,396077691	0,3960776907
	100	<b>0,0715828544</b>	0,396077691	0,07158285444
$\rho = 0,5 \beta$	0,1	<b>1,5331126460</b>	1,533112714	1,533112646
	1	<b>2,5114942915</b>	2,511494293	2,511494291
	10	<b>14,215025242</b>	14,21502524	14,21502524
	100	<b>80061435,62</b>	80061435,76	80061435,62

Tabela 1: Densidade de nêutrons em  $\text{cm}^{-3}$  com inserção de reatividade constante.

Podemos observar que, para todos os tempos e reatividades consideradas o método **FII** concorda em todas as casas decimais com BEFD, que é considerado um método benchmark. Já quando comparado com o PAM, temos uma precisão de 6 a 8 casas para todos os tempos e reatividades consideradas.

Para o segundo caso teste os resultados são apresentados na figura 1.

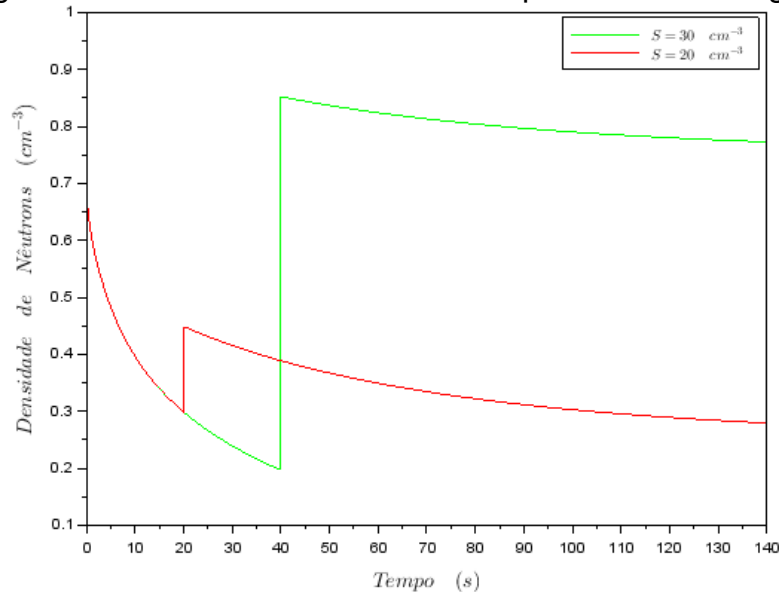


Figura 1: Densidade de nêutrons para  $(\rho = -0,5\beta)$  e duas fontes externas constantes ligadas  $S = 20 \text{ cm}^{-3}$  em 20 segundos e  $S = 30 \text{ cm}^{-3}$  em 40 segundos.

Pode-se observar que o ligamento de fontes externas em diferentes tempos faz a densidade de nêutrons aumentar dando um salto de densidade, estabilizando para um valor constante acima de zero.

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma solução das equações da cinética pontual de nêutrons, considerando reatividade constante, 6 grupos de energia e fonte externa constante. Os resultados apresentados mostraram que o método de Fator de Integração Implícito (FII) apresentou excelentes resultados quando comparados com a literatura, principalmente com o método BEFD considerado analítico. Os testes realizados com fontes externas foram plausíveis com a realidade física, mostrando o papel das fontes externas para manter a densidade de nêutrons estabilizada com o passar do tempo. Cabe salientar que esses reatores ADS são considerados reatores mais seguros, pois trabalham em estado subcrítico, na qual a população de nêutrons diminui com o passar do tempo, necessitando de uma fonte externa para manter a população de nêutrons constante.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Santos, B. M.; Cabral, R. G.; Gonçalves, M. and Duarte, S. B. **Neutron Generation and Diffusion Process in Reactors Stimulated by High Energy Proton Beam — The Accelerator Driven System**, American Institute of Physics, doi: 10.1063/1.3608996, 2011.
- Ganapol, B. D. A highly accurate algorithm for the solution of the point kinetics equations. **Annals of Nuclear Energy**, V62, p. 564-571, 2013.
- Medina, E. F. Y. **Método do Fator de Integração Implícito para Problemas de Reação-Difusão**. 2016. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - PPGMC-UFJF.
- Petersen, C.Z. **Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Nêutrons pelas Técnicas da GITT e Decomposição**. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - PROMEC-UFRGS.
- Tumelero, F. Polynomial approach method to solve the neutron point kinetics equations with use of the analytic continuation. **Kerntechnik**, v.81, n.6, p.1-29, 2016