Curvatura da espiral de Arquimedes.

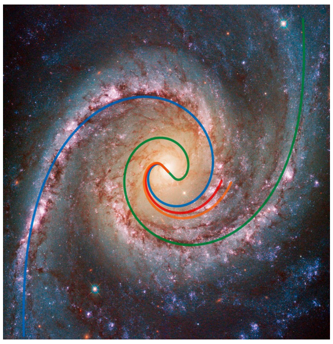
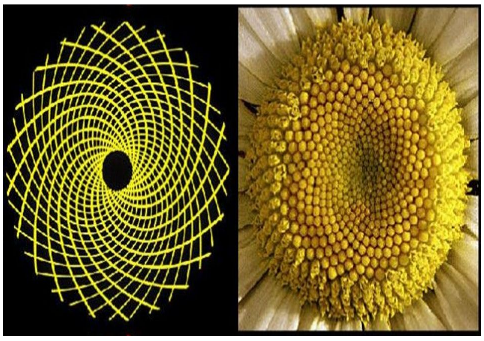
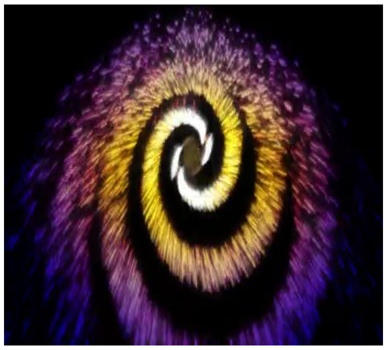
FELIPE M. MENDES BARBOSA[1]; LISANDRA SAUER DE OLIVEIRA.[2]

[1]*Universidade Federal De Pelotas - Campus Capão do Leão – felipeslav23@gmail.com*

[2]*Universidade Federal De Pelotas – lisandra.sauer@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste trabalho é estudar ferramentas da Geometria Diferencial no que se refere às curvas planas. Esse estudo está direcionado as espirais, onde sua presença de formas espirais tem sido notada e investigada por diversos matemáticos desde a antiguidade, estes estudos nos possibilitam analisar padrões presentes na natureza. Onde podemos destacar, a galáxia NGC1566 cujo seus membros principais obteve-se os traços com o uso do Geogebra (ver referência [C]), o girassol, e a roda de Catherine.

2. METODOLOGIA

A metodologia adotada foi o estudo do capítulo I - “Curvas Planas” do livro “Introdução à Geometria Diferencial” [B], da leitura do capítulos “Das Espirais (On Spirals)” do compilado “The works of archimedes” [D] e de encontros com a professora orientadora. Também foi utilizado o Geogebra para reproduzir a definição de espiral arquimediana e suas parametrizações.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

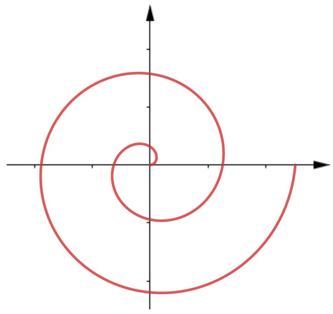
Uma espiral é uma curva plana definida por ARQUIMEDES no séc III AC como sendo aquela obtida quando uma linha reta desenhada num plano gira numa variação constante sobre uma extremidade que permanece fixa e retorna a posição inicial e se, ao mesmo tempo, em que a linha gira, um ponto se move numa variação constante ao longo da linha reta, começando pela extremidade que permanece fixa, extremidade chamada de origem. Logo nossa espiral é uma variação do traço de uma circunferência, assim teremos que definir o que será uma curva parametrizada, visto que agora o nosso raio é agora uma aplicação.

Definição 1: Uma *curva parametrizada do plano* é uma aplicação diferenciável α de classe C^{∞}, de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}^2$. A variável $t \in I$ é dita parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dos pontos $\alpha(t),\ t \in I$, é chamado traço da curva. Observamos que uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação. $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ que para cada t associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções e $x(t)$, $y(t)$ são diferenciáveis classe C^∞.

Logo as espirais são obtidas a partir de uma aplicação $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ onde que para cada t associa $\alpha(t) = (r(t)cos(t), r(t)sen(t))$, sendo $r(t)$ raio da espiral a qual se deseja obter o traço.

De um modo geral, a equação polar de uma espiral arquimediana é da forma: $r = a\theta^{1/n}$, onde a variável n determina o quão encaracolada ela será, quando $n < 0$ a espiral tende a ter voltas com valores para r, tal que: $-2 \leq r \leq 2$.

Exemplo: Podemos parametrizar a espiral de Arquimedes: $r(\theta) = a\theta$, $a > 0$, sendo θ em radianos. $\alpha = (a\theta, \theta)$, então podemos escrever a espiral como o traço da curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ definida por:



$$\alpha(t) = (atcos(t), atsen(t))$$

Se α uma curva parametrizada e regular, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, então T, definido por $T(t) = (x'(t), y'(t))$, e um campo de classe C^∞ ao longo de α. T é chamado campo tangente.

No caso em que α está parametrizada pelo comprimento de arco, T é um campo unitário, isto é, $\|T\| = 1$. O campo N dado por $N(t) = (-y'(t), x'(t))$, é também um campo de classe C^∞ ao longo de α. Observe que, para todo $t \in I$.

Definição 2: Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é dita *parametrizada por comprimento de arco* se para todo $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$.

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| \mathrm{d}t = t_1 - t_0$$

A demonstração da proposição abaixo encontra-se em [B].

Proposição 1: Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, para todo $t \in I$, $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Definição 3: Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O referencial $\{T(s), N(s)\}$ é chamado *referencial de Frenet* de α. Visto que $\|T\| = 1$ temos que $T'(s)$ é perpendicular a $T(s)$. Como T e N geram $\mathbb{R}^2$, temos que para cada $s \in I$, $T'(s)$ é paralelo a $N(s)$. Isso significa que existe uma função k, tal que:

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

Definição 4: A função k, é chamada *função curvatura* de α em $s \in I$. Observe que a curvatura $k(s)$ é dada por $k(s) = \ll T'(s), N(s) \gg$. Portanto temos que $k : I \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞, quando α for de classe C^∞. A curvatura então é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta. Que pode ser obtido através do seguinte resultado, cuja demonstração se encontra em [B].

Proposição 2: Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então a curvatura de α em $t \in I$ é dada pela expressão:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2)^3}} \qquad (1)$$

Exemplos:

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2$$
$$\alpha(t) = (atcos(t), atsen(t)), a \neq 0$$

Efetuando-se o cálculo da curvatura da curva espiral acima, a partir de (1) temos que: $k(t) = \frac{1}{at}$ calculando sua derivada temos $k'(t) = -\frac{1}{at^2}$.

Analisando os limites em 0 temos:

$$\lim_{x \to 0^-} k'(t) = -\infty = \lim_{x \to 0^+} k'(t)$$

Não há zeros para $k'(t)$, logo não possui máximos e mínimos. Observamos que a medida que $t \to 0$ temos os maiores valores para $k(t)$, logo proximo do ponto (0, 0) temos maior encaracolamento de $\alpha(t)$, enquanto que para $t \to \infty$ temos os menores valores da curvatura $k(t) \to 0$, ou seja, a medida que t aumenta, nossa curva tende a se aproximar de uma reta.

4. CONCLUSÕES

Acreditamos que abordar as espirais logarítmicas com as ferramentas da geometria diferencial traduz matematicamente noções de caráter extrínseco e intrínsecos das curvas, e que sem elas teríamos apenas um aspectos limitados. A espiral logarítmica possui relação com a sequência de Fibonacci e também a proporção áurea. Tem sido tradicionalmente escolhida para descrever os traços dos membros de galáxias espirais, pois, seus "braços" são aproximadamente espirais logarítmicas.

Porém, outra fórmula deriva da análise de equações encontrada na geometria não-euclidiana de espaços negativamente curvados. Esta geometria hiperbólica foi descoberta e publicada por Bolyai (1832) e independentemente por Lobachevsky. Essa nova fórmula foi descoberta por RINGERMARCHER. H e MEAD. L (ver referência [C]).

Fazendo uma observação análoga à definição de Arquimedes de espiral, temos um corpo no espaço que sofre influência da atração gravitacional por outros corpos mais densos que ele. Logo, grandes corpos celestes se tornam o centro de espirais que são traçadas pelo movimento dos outros corpos em relação da atração gravitacional.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[A] Howard Anton, S. D., Irl Bivens (2014). "Calculo - Vol. I", 10o edn. Bookman.

[B] Tenenblat, K. (2008). Introdução à Geometria Diferencial, vol 23, 2o edn. Blucher.

[C] Harry Ringermacher, L. M. (2009). A new formula describing the scaffold structure of spiral galaxies. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 397(1), 164–171.

.

[D] Heath, T. L. (1897). The works of archimedes. Disponível em https://archive.org/details/worksofarchimede029517mbp.

[E] Weisstein, E. W. (2018). Archimedean spiral. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSpiral.html.