A IRRACIONALIDADE DO NÚMERO DE EULER E π

DOUGLAS MACHADO DA SILVA[1]; ANDREA MORGADO[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas – Doumach99@gmail.com
[3]Universidade Federal de Pelotas – andrea.morgado@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A prova de que os números e e π são irracionais fazem parte de um estudo mais geral dentro do projeto “Iniciação Científica em Tópicos de Álgebra II” sobre tais números: sua transcendência. Dizemos que um número real é transcendente se este não é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. A relação entre a irracionalidade dos números e e π e sua transcendência se dá pelo fato de que “se um número real é transcendente, então este número é irracional”. Sendo assim, vamos apresentar resultados sobre a irracionalidade de tais números a partir de sua definição.

Podemos observar que durante o estudo do Cálculo Diferencial e Integral os alunos utilizam inúmeras vezes expressões matemáticas envolvendo o número de Euler e e o número π, mas essa abordagem é feita em geral visando o cálculo propriamente dito, uma vez que abordar com profundidade resultados acerca destes números, não é prioridade destas disciplinas. Neste trabalho, propomos um estudo mais especifico destes números visando provar que os mesmos são números irracionais, utilizando de resultados apresentados em (FIGUEIREDO, 2011). Para um bom entendimento desses resultados, são necessários os seguintes pré-requisitos: indução matemática, noções de derivada e integral e expansão de funções em séries de potências, que podem ser encontrados em (Polcino, 2001) e (Stewart, 2014).

2. METODOLOGIA

Este trabalho se deu através de estudos de tópicos do livro texto (FIGUEIREDO, 2011). Foram realizados encontros semanais entre o aluno e a orientadora do projeto, afim de sanar dúvidas existentes e acompanhar o andamento do trabalho na forma de seminários.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 A IRRACIONALIDADE DO NÚMERO DE EULER

Iniciamos apresentando uma definição para o número de Euler e embasados nas ideias do Cálculo. Definimos o número e como o número tal que a área hachurada abaixo é igual a 1.

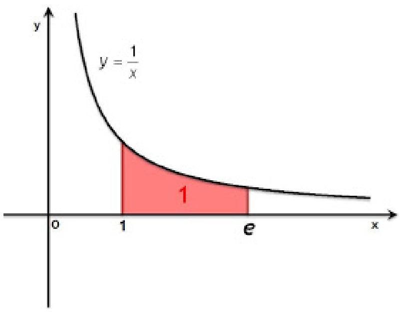

Figura 1: Gráfico da função $f(x) = 1/x$

A seguinte igualdade pode ser encontrada nos livros de cálculo:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!}. \qquad (1)$$

Sendo assim, de acordo com (FIGUEIREDO, 2011), para demonstrar que o número e definido acima é irracional, usamos um argumento similar ao utilizado na prova que o número $\sqrt{2}$ é irracional, ou seja, suponhamos por absurdo que e é um número racional. Assim sendo, consideremos $p, q \in \mathbb{N}$, tais que $q \neq 0$ e $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$, $e = \frac{p}{q}$.

Substituindo $e = \frac{p}{q}$ na igualdade (1) segue que

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \cdots = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Portanto

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \qquad (2)$$

Observemos que

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{q!\,(q+1)} + \frac{1}{q!\,(q+1)(q+2)} + \frac{1}{q!\,(q+3)(q+2)(q+1)} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + \cdots\right)$$

$$< \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right).$$

onde a desigualdade acima segue do fato que, para todo n maior igual a 2, é válido que

$$(q+n)\big(q+(n-1)\big) \ldots (q+2)(q+1) > (q+1)^n.$$

Como $\frac{1}{q+1} < 1$ segue que

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{q!}\frac{1}{q}. \qquad (3)$$

Logo, de (2) e (3) segue que

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

.

Portanto,

$$0 < \ q!\left(\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)\right) < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Observemos que a desigualdade acima determina a existência de um número inteiro entre 0 e 1, o que é um absurdo (ver Polcino, 2001, Proposição 1.2.7). Portanto, o número de Euler é irracional.

3.2 A IRRACIONALIDADE DE π

Definimos o número π como sendo o valor obtido pelo quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência de raio $r > 0$. Seguindo (FIGUEIREDO, 2011), queremos mostrar que π é irracional, para isso usaremos argumentos similares a prova de que e é irracional no seguinte sentido: vamos supor que π^2 é racional implicando na existência de um inteiro entre 0 e 1.

Sendo assim consideremos a função

$$f(x) = \frac{x^n(1-n)^n}{n!} \ , n \in \mathbb{N}.$$

O Lema abaixo pode ser encontrando em (Figueiredo, 2011, páginas 14 e 15). Iremos enunciá-lo sem demonstração.

Lema 1: $Seja\ D^k f\ a\ k - ésima\ derivada\ da\ função\ f(x)\ e\ D^0 f = f, então:$

a) $D^k\ f(0)$é $um\ número\ inteiro,\ \ para\ todo\ k \in \mathbb{N}$

b) $D^k f(1)$é $um\ número\ inteiro, para\ todo\ k \in \mathbb{N}$

Sejam $p, q \in \mathbb{N},$ tais que $q \neq 0$ e $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$, $\pi^2 = \frac{p}{q}$. Consideremos a função:

$$F(x) = q^n\{\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}D^2f(x) + \pi^{2n-4}D^4f(x) - \cdots + (-1)^n D^{2n}f(x)\}. \ .$$

Como $\pi^2 = \frac{p}{q}$, segue do Lema 1 que F(1) e F(0) são números inteiros.
Observemos que:

$$\{F'(x)\mathrm{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\}' = F''(x)\mathrm{sen}(\pi x) + \pi^2 F(x)\mathrm{sen}(\pi x)$$
$$= p^n\pi^2 f(x)\mathrm{sen}(\pi x)\ ,$$

onde o símbolo ‘ representa a derivada.

Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos que

$$p^n\pi^2\int_0^1 f(x)\mathrm{sen}(\pi x)dx = F'(1)\mathrm{sen}(\pi) - \pi F(1)\cos(\pi) - F'(0)\mathrm{sen}(0) + \pi F(0)\cos(0)$$
$$= \ \pi F(1) + \pi F(0)\ ,$$

ou seja,

$$p^n\pi \int_0^1 f(x)\mathrm{sen}(\pi x)dx = F(1) + F(0). \qquad (4)$$

Observemos que para $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ para todo $0 < x < 1$. Logo,

$$0 < p^n\pi \int_0^1 f(x)\mathrm{sen}(\pi x)dx < \frac{p^n\pi}{n!}\int_0^1 \mathrm{sen}(\pi x)dx\,. \qquad (5)$$

Calculando o último membro da desigualdade acima obtemos

$$\frac{p^n\pi}{n!}\int_0^1 \mathrm{sen}(\pi x)dx = \frac{2p^n}{n!}\,. \qquad (6)$$

Logo de (4), (5) e (6) temos que

$$0 < F(1) + F(0) < \frac{2p^n}{n!}.$$

Observemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{2p^n}{n!} = 0$, assim para algum $n \in \mathbb{N}$ é válido que $\frac{2p^n}{n!} < 1$. Lembremos que $F(1) + F(0)$ é um número inteiro. Portanto para tal n encontramos um inteiro entre 0 e 1, o que é um absurdo (ver Polcino, 2001, Proposição 1.2.7). Sendo assim, π^2 é irracional, implicando que π é irracional como queríamos demonstrar.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho proporcionou um maior conhecimento acerca da teoria dos números, o que em geral não é visto em cursos de Licenciatura em Matemática. Além disso, foi possível ter uma visão diferente do uso das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. Para dar continuidade ao trabalho pretendemos estudar a transcendência dos números π e e.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIGUEIREDO, D.G. **Números irracionais e transcendentes**. 3 edição. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

MILIES, Francisco César Polcino. **Números: Uma introdução à matemática.** 3 edição. São Paulo: Editora da universidade de São Paulo, 2001.

STEWART, James. **Cálculo vol. 2.** 7 edição. São Paulo: Cengage Lerning, 2014.

As imagens utilizadas neste trabalho são de autoria de Picasa 3.0 retiradas de Matmagias.blogspot.com