

## ESTUDO DA ESTABILIDADE DO MODELO SAZONAL DA BROCA DA CANA DE AÇÚCAR

JOÃO INÁCIO MOREIRA BEZERRA; ALEXANDRE MOLTER<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – jimbezerra@inf.ufpel.edu.br

<sup>3</sup>Universidade Federal de Pelotas – alexandre.molter@yahoo.com.br

### 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o interesse econômico na produção da cana de açúcar no Brasil vem crescendo significativamente, em especial devido a sua importância para a produção de etanol, combustível o qual o Brasil é o segundo maior produtor do mundo. O ambiente de plantação da cana fornece condições perfeitas de *habitat* para muitas pestes, que pode afetar a produção. Uma destas pestes é a chamada broca da cana de açúcar (*Diatraea saccharalis*). Este trabalho irá estudar a estabilidade do modelo de interação desta peste com seu predador natural, a larva parasita *Cotesia flavipes*.

Em sua grande maioria, as dinâmicas de populações ocorrem em ambientes em que seus parâmetros variam de acordo com a estação do ano (RINALDI, 1993). Portanto, neste trabalho será estudada a dinâmica da broca da cana de açúcar com a taxa de parasitismo apresentando variação sazonal. Esta variação sazonal causa mudanças significativas na dinâmica do sistema, quando comparado ao sistema com parâmetros constantes.

### 2. METODOLOGIA

O sistema de equações diferenciais que descreve a interação da broca da cana com seus inimigos naturais é dado por SILVEIRA(2013), RAFIKOV(2014):

$$\begin{cases} \dot{H} = r \left(1 - \frac{H}{K}\right) H - n_1 H - \beta H P, \\ \dot{I} = \beta H P - I(m_2 + n_2), \\ \dot{P} = \delta n_2 I - m_3 P, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $H$  é a densidade larval da broca da cana de açúcar (*Diatraea saccharalis*),  $I$  é a densidade da população da larva que é parasitada por  $P$ , enquanto  $P$  é a densidade da larva parasita (*Cotesia flavipes*). Quanto aos parâmetros, tem-se que  $r$  representa a taxa de crescimento intrínseco da praga;  $K$  é a capacidade de carga da presa do ambiente;  $m_2$  e  $m_3$  são as taxas de mortalidade de  $I$  e  $P$ , respectivamente;  $n_1$  é a fração da população da larva que se transforma em pupa em um instante de tempo  $t$ ;  $n_2$  é a fração da larva parasitada da qual parasitoides adultos emergem em um instante de tempo  $t$ ;  $\beta$  é a taxa intrínseca de parasitismo;  $\delta$  é o número de parasitoides adultos que emergem de uma larva parasitada em um instante  $t$ .

Este sistema é um sistema de equações diferenciais não lineares, e portanto, não pode ser solucionado por métodos analíticos. O comportamento do sistema é analisado em torno de seus pontos de equilíbrio pela matriz Jacobiana.

Em torno de um ponto crítico  $(x_0, y_0, z_0)$ , a matriz Jacobiana do sistema (1) é dada por:

$$J(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H'}{\partial H} & \frac{\partial I'}{\partial H} & \frac{\partial P'}{\partial H} \\ \frac{\partial H'}{\partial H'} & \frac{\partial I'}{\partial H'} & \frac{\partial P'}{\partial H'} \\ \frac{\partial I'}{\partial I} & \frac{\partial I'}{\partial I} & \frac{\partial I'}{\partial I} \\ \frac{\partial H'}{\partial P} & \frac{\partial I'}{\partial P} & \frac{\partial P'}{\partial P} \end{bmatrix} \quad (2)$$

O comportamento do sistema quanto à estabilidade será determinado a partir dos autovalores de (2). Os autovalores serão todos os valores de  $\lambda$  que respeitem a seguinte condição:

$$\det(J(x_0, y_0, z_0) - \lambda I) = 0, \quad (3)$$

O cálculo deste determinante irá formar um polinômio de terceiro grau, que será denominado de polinômio característico do sistema. Se todas as raízes deste polinômio tiverem parte real negativa, o sistema será estável. Caso contrário, o sistema será instável.

Em um polinômio de terceiro grau, definido pela equação  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , o sinal pode ser analisado pela tabela de Routh-Hurwitz (ROUTH(1877), HURWITZ(1895)), que será mostrada a seguir:

$x^3$	$A$	$c$
$x^2$	$B$	$d$
$x$	$e = \frac{bc-ad}{bc}$	$0$
$x^0$	$D$	

Tabela 1 – Tabela do Método de Routh-Hurwitz

Caso todos os valores da primeira coluna ( $a, b, e, d$ ) apresentarem o mesmo sinal, o sistema será estável.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O sistema apresenta os seguintes pontos de equilíbrio:  $A(0,0,0)$ ,  $B(\frac{K(r-n_1)}{r}, 0,0)$  e  $C(H_3, I_3, P_3)$ , onde:

$$H_3 = \frac{(m_2 + n_2)m_3}{\beta\gamma n_2} \quad P_3 = \frac{1}{\beta} \left[ r \left( 1 - \frac{(m_2 + n_2)m_3}{\beta\gamma n_2 K} \right) - n_1 \right] \quad I_3 = \frac{m_3}{\gamma n_2} P_3$$

O estudo será feito no ponto de equilíbrio C, no qual há a coexistência das três espécies. Neste ponto, o sistema apresenta a seguinte matriz Jacobiana:

$$J(H_3, I_3, P_3) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rH_3}{K} - n_1 - \beta P_3 & 0 & -\beta H_3 \\ \beta P_3 & -m_2 - n_2 & \beta H_3 \\ 0 & \gamma n_2 & -m_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando-se a condição (3), chega-se ao seguinte polinômio característico:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

no qual:

$$a_1 = m_2 + n_2 + m_3 + \frac{rH_3}{BK} \quad a_2 = (m_2 + n_2 + m_3) \frac{rH_3}{BK} \quad a_3 = \beta P_3(m_2 + n_2)m_3$$

$$B = -\frac{c_1}{2} + \sqrt{\frac{(c_1)^2}{4} + c_2} \quad c_1 = m_2 + n_2 + m_3 + \frac{(m_2 + n_2)m_3}{m_2 + n_2 + m_3} \quad c_2 = \frac{(m_2 + n_2)m_3(r - n_1)}{m_2 + n_2 + m_3}$$

Aplicando-se o método de Routh-Hurwitz, chega-se à conclusão de que ocorre uma bifurcação de Hopf no seguinte ponto (RAFIKOV, 2014):

$$\beta = \frac{m_3(m_2 + n_2)r}{\gamma n_2 B K} = \beta_{cr}$$

Isto significa que, para valores de  $\beta < \beta_{cr}$ , o sistema é assintoticamente estável. Para  $\beta > \beta_{cr}$ , o sistema é instável, apresentando um ciclo limite de período igual a um. A Figura abaixo mostra o diagrama de bifurcações do modelo não-sazonal, no qual a bifurcação de Hopf ocorre em  $\beta_{cr} \cong 0.000007$ .



Figura 1: Diagrama de bifurcações do modelo da broca da cana.

Agora, esta condição será aplicada para o modelo, no qual, a taxa de parasitismo varia sazonalmente, de acordo com a seguinte equação:

$$\beta = \beta_0 \left(1 + \epsilon \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right)\right),$$

onde  $\beta_0$  é a média da taxa de parasitismo e  $\epsilon$  representa a intensidade do fenômeno de sazonalidade.

Com isto, agora o valor de  $\beta$  é dependente do tempo. Isto significa que ele irá oscilar ao longo do tempo, podendo ser tanto maior ou menor do que  $\beta_{cr}$ . Ou seja, ao longo da integração, o sistema terá momentos de estabilidade e momentos de instabilidade alternados. Isto abre espaço para o aparecimento de novos comportamentos na solução do sistema, como mostra a Figura 2 abaixo.

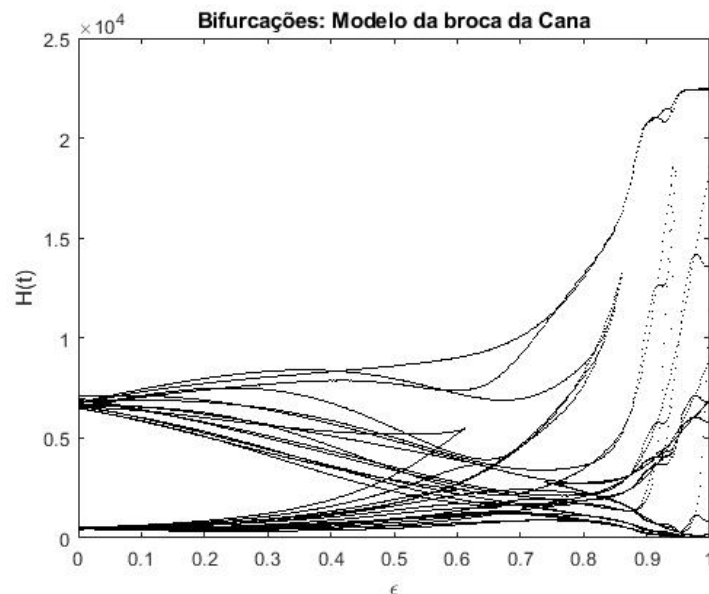


Figura 2: Diagrama de bifurcações para o modelo da broca da cana sazonal

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi estudado a estabilidade do modelo que descreve a interação da broca da cana de açúcar com seu predador natural. Foi mostrado que na presença de sazonalidade, o sistema pode apresentar comportamento imprevisível. Esta imprevisibilidade pode vir a atrapalhar o cultivo da cana, pois há um valor limítrofe para o qual a população da peste não causa dano econômico. Por isso existe a necessidade de se estudarem técnicas que tornem possível controlar este comportamento imprevisível.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Hurwitz, A. On the condition under which has only roots with negative real parts. **Mathematische Annalen**, v. 46, n. 2, p. 273-284, 1895.
- Rafikov, M, Silveira, J. On dynamical behavior of the sugarcane borer – Parasitoid agroecosystem. **Ecological Complexity**. v. 18, p. 67-73, 2014.
- Rinadi, S, Muratori, S, Kuznetsov, Y. Multiple attractors, catastrophes and chaos in seasonally perturbed predator-prey communities. **Bulletin of Mathematical Biology**, v.55, n.1, p 15-35, 1993.
- Routh, E.J. **A treatise on the Stability of Motion**. Londres, R. U. MacMillan. 1877
- Silveira, J.C. **Modelagem matemática e otimização do controle biológico de pragas para a produção sustentável de Etanol de cana-de-açúcar**. Tese(Doutorado em Energia). Universidade Federal do ABC, 2013.