UMA INTRODUÇÃO ÀS ÁLGEBRAS DE LIE

H. BARCELOS, Braian [1]; MORGADO, Andrea[2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – braianhenzelbarcelos@yahoo.com.br*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – andrea.morgado@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Uma álgebra de Lie nada mais é que um espaço vetorial sobre um corpo, onde definimos uma operação de produto que satisfaz alguns axiomas (ver definição [3.2]). O nome “Álgebra de Lie” faz referência ao matemático norueguês Marius Lie, que estudava Grupos de Lie, os quais as características podem ser expressas através de comutadores.

É interessante que o estudo sobre Álgebras de Lie seja feito após um rigoroso estudo de álgebra linear, tanto devido à beleza de seus resultados e estrutura, quanto devido à sua ligação com outras áreas da matemática, como Teoria de Grupos, Geometria Diferencial e Topologia [J]. Decidimos por estudar sobre as álgebras de Lie pelo fato da envolvente da Álgebra de Lie ser um exemplo importante de álgebras de Hopf, as quais vêm sendo estudadas desde o segundo semestre de 2016 através do projeto de pesquisa intitulado “Álgebras de Hopf” da Universidade Federal de Pelotas.

Neste trabalho apresentaremos o conceito de Álgebras de Lie, exemplos dessa estrutura que abordam tópicos de álgebra linear, os conceitos de subálgebra e ideal, e um resultado envolvendo a soma direta de dois subespaços vetoriais específicos de uma álgebra de Lie. Ressaltamos que neste trabalho k é um corpo e todos os espaços vetoriais são sobre k.

2. METODOLOGIA

A metodologia utilizada consiste em encontros com a professora orientadora, onde os estudos realizados pelo discente são feitos em formato de seminário, nos quais são discutidos temas referentes à teoria, dúvidas, exercícios, entre outros.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Iniciaremos com o conceito de álgebra, que servirá como base para as definições apresentadas neste trabalho.

Definição 3.1: [J, pg 2] Sejam k um corpo e U um k-espaço vetorial. Dizemos que U é uma álgebra se existir um produto $\cdot: U \times U \rightarrow U$ tal que:

(i) $(x_1 + x_2)y_1 = x_1y_1 + x_2y_1$, $x_1(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_1y_2$;

(ii) $\alpha(x_1y_1) = x_1(\alpha y_1) = (\alpha x_1)y_1$,

para quaisquer $x_1, x_2, y_1, y_2 \in U$ e $\alpha \in k$.

Em particular, se $x(yz) = (xy)z$, para quaisquer $x, y, z \in U$, dizemos que U é uma álgebra associativa.

A partir dessa estrutura, podemos definir uma álgebra de Lie.

Definição 3.2: [J, pg 3] Seja U uma álgebra. Dizemos que U é uma álgebra de Lie se $x^2 = 0$ e $(xy)z + (zx)y + (yz)x = 0$ para quaisquer $x, y, z \in U$. A segunda condição é chamada Identidade de Jacobi.

Observação 3.3: Aplicando a primeira condição em $x + y$, com $x, y \in U$, temos que:

$$(x + y)^2 = 0 \Rightarrow xy = -yx.$$

Reciprocamente, se característica de U é diferente de 2, temos que:

$$xy = -yx \Rightarrow x^2 = 0.$$

Exemplo 3.4: Seja U uma álgebra bidimensional com base $\{e, f\}$. Definimos o produto nos elementos da base por $ef = e = -fe$, $e^2 = 0$, $f^2 = 0$. Estendendo multiplicativamente, temos que U munida deste produto é uma álgebra de Lie.

As álgebras de Lie surgem de álgebras associativas de maneira natural: se U uma álgebra associativa, então definimos um produto em U, dado por $[,] : U \times U \to U$ onde $[x, y] = xy - yx$. Temos que U com o produto $[,]$ é uma álgebra de Lie, a qual denotamos usualmente por L. Chamamos o produto $[,]$ de comutador ou produto de Lie.

Exemplo 3.5: Seja V um k-espaço vetorial. Considere $End(V)$ o conjunto de todas as transformações lineares de V em V. Então, se $T, S \in End(V)$ e $\alpha \in k$, temos que $(T + S)(x) = T(x) + S(x)$, $(\alpha T)(x) = \alpha(T(x))$, $(TS)(x) = T(S(x))$, para todo $x \in V$. Temos, então, que $End(V)$ munido das operações de soma e produto descritos acima é uma álgebra associativa e, portanto, uma álgebra de Lie com o produto de Lie, chamada Álgebra dos Endomorfismos de V.

Definição 3.6: [H, pg 1] Sejam U uma álgebra de Lie com o produto $\cdot : U \times U \to U$ e V um subespaço vetorial de U. Dizemos que V é uma subálgebra de Lie de U se para quaisquer $x, y \in V$, temos que $x \cdot y \in V$.

A partir dessas definições, exploraremos alguns exemplos importantes das álgebras de Lie.

Exemplo 3.7: Seja V um k-espaço vetorial de dimensão finita munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada $(,) : V \times V \to V$. Considere

$End(V)$ a álgebra dos endomorfismos de V e $I = \{A \in End(V) : A^* = -A\}$ um subespaço vetorial de $End(V)$ onde A^* é a adjunta de A. Então I é uma subálgebra de Lie de $End(V)$, chamada Álgebra de Lie Ortogonal em relação a $(,)$.

Exemplo 3.8: Considere V um k-espaço vetorial e $End(V)$ a álgebra dos endomorfismos de V. Seja $D : V \to V$ uma transformação linear em $End(V)$ que satisfaz $D(xy) = D(x)y + xD(y)$, para quaisquer $x, y \in V$. Dizemos que D é uma derivação em V e o conjunto das derivações em V é uma subálgebra de Lie de $End(V)$, chamada Álgebra das Derivações em V.

Observação 3.9: Considere U uma álgebra associativa e fixamos $a \in U$. Definimos as transformações lineares $a_r : U \to U$ e $a_l : U \to U$, dadas por $a_r(x) = xa$ e $a_l(x) = ax$, para todo $x \in U$. Temos que a transformação linear $D_a = a_r - a_l$ é uma derivação em U e a chamamos de derivação interna determinada por a. Temos também que $ad\, a : U \to U$, tal que $(ad\, a)(x) = [xa]$ é uma derivação que também chamamos de derivação interna determinada por a.

A próximas definições se farão necessárias para que possamos enunciar uma proposição que envolve dois subespaços vetoriais específicos de uma álgebra de Lie:

Definição 3.10: [J, pg 10] Seja L uma álgebra de Lie obtida a partir de uma álgebra associativa U munida do produto de Lie. Considere I um subconjunto não-vazio de L. Dizemos que I é um ideal de L se:

(i) I é um subespaço vetorial de L;

(ii) $[ab] \in I$, para quaisquer $a \in L$, $b \in I$.

Observação 3.11: Consideramos $C(L)$ o subconjunto de L dos elementos c, tais que $[ac] = 0$ para todo $a \in L$. Temos que $C(L)$ é um ideal de L, chamado centro de L.

Definição 3.12: [J, pg 11] Dizemos que uma álgebra de Lie L é completa se todas as suas derivações são internas e $C(L) = \{0\}$.

A partir destas definições, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.13: [J, pg 11] Seja L uma álgebra de Lie e R um ideal de L, tal que R é completa. Então $L = R \oplus B$, onde B é um ideal de L.

4. CONCLUSÕES

Os estudos realizados sobre esse assunto proporcionou um aprofundamento em conceitos da Álgebra Linear, bem como uma familiarização maior com determinadas estruturas algébricas. Este projeto de pesquisa contribui com uma ampliação dos conhecimentos na área da Matemática Pura e, ainda, proporciona ferramentas e métodos necessários para futuras pesquisas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[H] HUMPHREYS, James E. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. Third printing, revised. Springer, 1972.

[J] JACOBSON, Nathan. **Lie Algebras**. Dover Publications, Inc, 1962.