APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA NA MODELAGEM DE MEIOS CONTINUAMENTE MICROPERIÓDICOS E NÃO LINEARES

ROBERTO MARTINS DA SILVA DÉCIO JÚNIOR[1]; LESLIE DARIEN PÉREZ FERNÁNDEZ[2]

[1]Universidade Federal de Pelotas–roberto.decio.jr@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas– leslie.fernandez@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Meios continuamente microperiódicos são exemplos de materiais heterogêneos, cuja escala de distribuição das heterogeneidades (microestrutura) é muito maior que a escala atômica e muito menor que a escala macroscópica (macroestrutura). Exemplos podem ser encontrados nos materiais funcionalmente graduados (madeira, materiais da construção civil, entre outros), cuja heterogeneidade baseia-se na transição gradual das propiedades físicas, espacialmente falando (SADD, 2005).

A separação de escalas nesses meios faz com que os problemas de equações diferenciais que modelam seu comportamento físico apresentem coeficientes rapidamente oscilantes. Isto, por sua vez, dificulta a aplicação direta de métodos numéricos usuais, como os métodos de Diferenças ou Elementos Finitos (PANASENKO, 2008). Porém, estando satisfeita a Hipótese de Homogeneidade Equivalente, o material heterogêneo é considerado fisicamente equivalente a um homogêneo ideal, logo o problema a ser resolvido agora terá coeficientes constantes. Essa é a abordagem dos métodos de homogeneização, ou mais específicamente, do Método de Homogeneização Assintótica (MHA), detalhado em BAKHVALOV; PANASENKO (1989).

No MHA, é considerada uma solução assintótica em dupla escala, de potências de um parâmetro pequeno $\varepsilon > 0$ (característico da microescala), que aproxima a solução do problema original. Nesta assintótica, o primeiro termo representa o comportamento do material homogêneo equivalente (o qual será o comportamiento efetivo do material heterogêneo), e o termos restantes reproduzem os detalhes locais da solução do problema original. Tradicionalmente, a assintótica de ordem 1 (série truncada na primeira potência de ε) se mostra como uma boa aproximação, entretanto, em determinadas situações apenas a assintótica de ordem 2 consegue reproduzir detalhes locais da solução do problema original (SU et al., 2011).

Por outro lado, considerável progresso tem sido obtido com a aplicação do MHA nos casos em que o material apresenta comportamento linear. Entretanto, existem muitos fenômenos físicos de natureza não linear, os quais não podem ser estudados através de modelos lineares, por exemplo: plasticidade, viscoelasticidade, hiperelasticidade, eletrostrição, entre outros (PONTE-CASTÑEDA; SUQUET, 1998).

Diante disso, neste trabalho pretende-se aplicar o MHA para encontrar a solução do problema homogeneizado equivalente e as soluções assintóticas de segunda ordem, para problemas de valores de contorno com coeficiente rapidamente oscilantes, que modelam o comportamento físico de um meio não linear, unidimensional e continuamente microperiódico.

2. METODOLOGIA

O meio microperiódico em questão pode ser interpretado por uma barra de comprimento l, que será representada matematicamente por um intervalo $[0,l]\in\mathbb{R}$, cuja célula periódica será $[0,\varepsilon]$. A separação de escalas se dará através do parâmetro ε, de forma que x será a macroescala e $y=x/\varepsilon$ será a microescala. Tais ideias estão ilustradas na Figura 1.

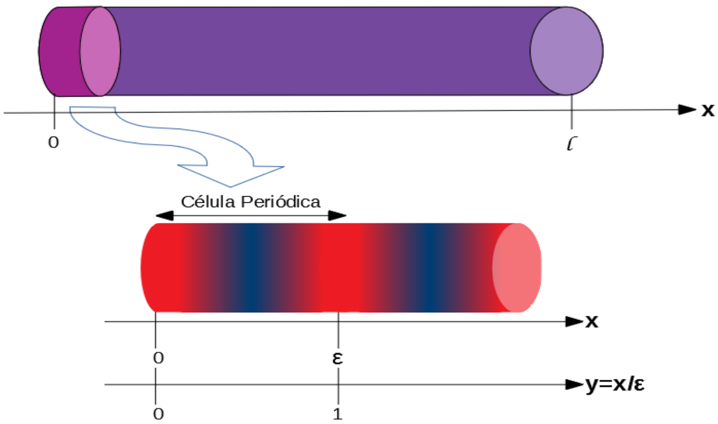

Figura 1: Meio microperiódico unidimensional

O problema a ser considerado será um problema de valor de contorno (PVC) para a equação de difusão unidimensional e estacionária, na forma:

$$P_0:\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[\sigma\left(\dfrac{x}{\varepsilon},\dfrac{du^{\varepsilon}}{dx}\right)\right], x\in(0,1)\\ u^{\varepsilon}\big|_{x=0}=g_1\\ u^{\varepsilon}\big|_{x=l}=g_2\end{cases},$$

onde σ é o fluxo não linear e u^{ε} a densidade, que podem ser (respectivamente) o fluxo de calor e a temperatura em um contexto térmico, ou a tensão de deformação e o deslocamento no contexto mecânico.

A solução assintótica de segunda ordem a ser considerada será:

$$u^{(2)}(x,y)=v_0(x)+\varepsilon u_1(x,y)+\varepsilon^2 u_2(x,y),$$

e de aplicá-la na equação e nas condições de contorno do problema P_0, levando-se em conta a regra da cadeia, obtém-se uma sequência recorrente de problemas para as potências de ε, de onde surgem os seguintes problemas (chamados locais):

$$P_L^{(1)}:\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\sigma\left(\mathrm{y},\dfrac{dv_0}{dx}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]=0, \mathrm{y}\in(0,1)\\ u_1\big|_{y=0}=u_1\big|_{y=1}=0\end{cases}$$

$$P_L^{(2)}:\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial\sigma}{\partial\xi}\left(\mathrm{y},\dfrac{dv_0}{dx}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right]=f(\mathrm{x})-\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\left(\mathrm{y},\dfrac{dv_0}{dx}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right), \mathrm{y}\in(0,1)\\ u_2\big|_{y=0}=u_2\big|_{y=1}=0\end{cases}$$

Estes problemas fornecem os termos u_1 e u_2 da assintótica a ser encontrada. Da condição para existência e unicidade da solução do problema $P_L^{(2)}$ surge o problema homogeneizado, referente ao material homogêneo ideal equivalente ao original:

$$P_H : \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\hat{\sigma}\left(\dfrac{dv_0}{dx}\right)\right] = f(x), x \in (0,1) \\ v_0\big|_{x=0} = g_1 \\ v_0\big|_{x=l} = g_2 \end{cases}$$

onde $\hat{\sigma}\left(dv_0 / dx\right)$ é o fluxo efetivo não linear. A solução do problema P_H assegura a existência e unicidade do termo u_2, além de fornecer o termo macroscópico da assintótica.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O caso particular de não linearidade considerado será o seguinte:

$$P_0 : \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[K^{\varepsilon}(x)\left(\dfrac{du^{\varepsilon}}{dx}\right)^n\right] = -1, x \in (0,1) \\ K^{\varepsilon}(x) = 1 + 0.25\sin(2\pi x / \varepsilon) \\ u^{\varepsilon}\big|_{x=0} = u^{\varepsilon}\big|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

cuja motivação vem do fato desta relação constitutiva potencial modelar importantes fenômenos como deformações plásticas e temperatura de escoamento de metais (PONTE-CASTAÑEDA; SUQUET, 1998).

Foram determinadas a solução exata do problema original, a solução do problema homogeneizado e as assintóticas de ordem 1 e 2, para diferentes valores de n, representando diferentes problemas. Os resultados foram obtidos com o auxílio da integração por Simpson 1/3 e Bissecção de Newton, implementados em linguagem Scilab, baseando-se nos algoritmos propostos em BURDEN; FAIRES (2008).

Na Figura 2 é apresentado um dos principais resultados obtidos.

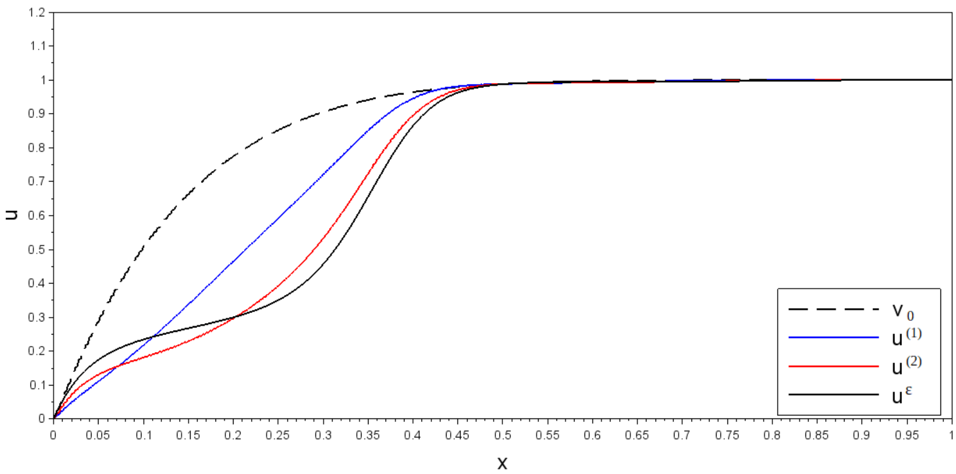

Figura 2: Resultados obtidos para $n = 1/7$ e $\varepsilon = 1/2$

Nesta figura é possível observar os principais conceitos até aqui abordados. Primeiramente, é visto que a solução do problema homogeneizado se mostrou como uma boa aproximação da solução original. Entretanto, no intervalo em que esta apresenta mais detalhes locais, as assintóticas se mostraram como melhor aproximação, destacando-se a assintótica de ordem 2 que se mostrou a mais eficiente em reproduzir os detalhes locais da solução original.

4. CONCLUSÕES

Diante dos resultados obtidos conclui-se que o MHA se mostrou uma ferramenta eficaz na aproximação da solução de um problema com coeficientes rapidamente oscilantes, e ainda na presença de não linearidade, como inicialmente proposto.

Mais que isto, percebeu-se que no caso considerado a assintótica de ordem 2 reproduziu melhor a oscilação local da solução original, mostrando a necessidade de considerar termos de ordem mais alta, ao contrário da abordagem mais tradicional.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. **Homogenisation: Averaging process in periodic media.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica.** São Paulo: CENGAGE Learning, 2008.

PANASENKO, G. P. Homogenisation for Periodic Media: from microscale to macroscale. **Physics of Atomic Nuclei**, Rússia, v.71, n.4, p.681-694, 2008.

PONTE-CASTAÑEDA, P.; SUQUET, P. Nonlinear composites. **Advances in Applied Mechanics**, United Kingdom, v.34, p.171-303, 1998.

SADD, N. H. **Elasticity: Theory, applications and numerics.** USA: Elsevier Academic Press, 2005.

SU, F.; XU, Z.; CUI, J.; DONG, Q. Multi-scale method for te quasiperiodic structures of composite materials. **Applied Mathematics and Computation**, v.217, n.12, p.5847-5852, 2011.