APLICAÇÃO DO MÉTODO RUNGE-KUTTA 4ª ORDEM NA MODELAGEM DE MISTURAS

CARLITA FELCHER LEMES[1]; LUIZA MENDES MARTINS[2]; VITÓRIA KLEIN[3]; LAUREN FARIAS[4]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – cafelcher@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – luiza.mends@hotmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – vitoria_klein@hotmail.com*
[4]*Universidade Federal de Pelotas – lauren.if@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

A modelagem numérica é uma ferramenta capaz de solucionar problemas dos mais simples, presentes em livros didáticos, como determinadas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem até problemas reais de engenharia e ciências exatas (BOYER; MERZBACH, 2012).

A modelagem matemática em conjunto com a numérica se torna extremamente importante na Engenharia de Petróleo, uma vez que são soluções populares, eficazes e baratas em detrimento a experimentos. É possível aplicá-las em problemas vinculados a reservatórios de petróleo, gás ou água, concentração de componentes (nafta, parafinas, entre outros) e até mesmo simular a trajetória de derrames de petróleo no mar (PALADINO, 2000).

Os métodos numéricos destacam-se na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO’s), principalmente levando em conta a dificuldade de solucionar determinadas EDO’s analiticamente. Optar por um método numérico na resolução de equações que modelam problemas reais nos permite fazê-la de maneira mais rápida e prática.

Para encontrar soluções aproximadas de problemas de valor inicial de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, são utilizados métodos numéricos como Euler, Euler melhorado, Taylor e Runge-Kutta. No século XVII Lehonard Euler deduziu que era possível, a partir de um processo iterativo, aproximar uma solução para um PVI num certo ponto. Posteriormente, esse método foi aprimorado por Gottfried Leibniz (BOYCE; DIPRIMA, 2015). Em Euler e Euler melhorado quanto menor o valor para *h (*o que justifica um número maior de passos para alcançar o resultado final), mais preciso e de melhor qualidade será a solução aproximada.

O método de Taylor é uma tentativa de aumentar a ordem dos métodos de Euler, requer o cálculo da segunda derivada e consiste no truncamento de dois termos da série de Taylor. O método utilizado para a solução do problema proposto pelo presente trabalho é o método desenvolvido por Carl David Runge e aperfeiçoado por Martin Wilhelm Kutta e é denominado Runge-Kutta (UFRGS, 2018).

O método de Runge-Kutta pode ser de 1ª ordem (método de Euler), 2ª, 3ª ou 4ª ordem, não é oportuno usar ordens superiores a quatro. Comparado aos demais métodos, o Runge-Kutta 4ª ordem (RK4) é o procedimento mais vantajoso para a resolução de EDO’s, pois é objetivo, não exige cálculo de derivadas e é de simples execução.

O problema proposto no presente trabalho envolve misturas. Mais especificamente uma mistura salina onde se deseja calcular a concentração de sal em um determinado período de tempo. Além disso, desenvolveu-se um algoritmo para evidenciar a eficácia do método numérico utilizado.

2. METODOLOGIA

Nesse estudo, empregamos o Runge-Kutta de 4ª ordem, com as seguintes equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{1}$$

onde,

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \tag{2}$$
$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \tag{3}$$
$$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \tag{4}$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \tag{5}$$

além de,

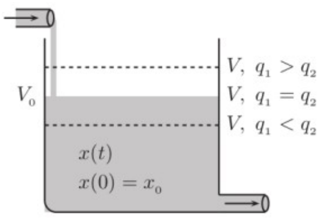
$$x_{n+1} = x_n + h \tag{6}$$

O problema proposto foi modelado matematicamente com base na lei de conservação das massas, descrita abaixo:

$$\frac{dQ}{dt} = (Taxa\ de\ entrada\ de\ sal) - (Taxa\ de\ saída\ do\ sal) \tag{7}$$

Deseja-se calcular a quantidade de uma substância $Q(t)$ em quilogramas, contida em um tanque em qualquer instante de tempo t, em minutos. O tempo em questão é de 30 minutos, o volume inicial V_0 é de 180L e a quantidade de sal inicial Q_0 é 10Kg. Já a velocidade da água ao é $Q_e = 4l/min$, enquanto a velocidade da água ao sair q_s é de 3l/min É importante ressaltar ainda que a água entra sem sal portanto a concentração de sal no início C_0 é igual a 0.

Figura 1: Tanque de mistura



Fonte: Retirado do site Luso Academia

Se Q é a quantidade de sal no tanque em um dado momento, o volume de solução salina em qualquer momento é dado pela Equação 8, enquanto a concentração de sal é dada pela Eq. 9:

$$V = Vo + (qe - qs)t \tag{8}$$
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Vo + (qe - qs)t} \tag{9}$$

Logo, adota-se o Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = -3\dfrac{Q}{180 + (4-3)t} \\ Q(0) = 10 \end{cases}$$

Assim, substituindo os valores dados, $t = 0$ e a partir da resolução da equação linear acima, obtém-se então a solução geral:

$$Q = \frac{58{,}32\ x\ 10^6}{(180+t)^3} \tag{10}$$

Para a resolução numérica, a partir do método RK4 utilizou-se o *Software* MATLAB (versão 9.2). Logo, na programação do algoritmo aplicou-se da Eq. 1 a 6 anteriores.

Arbitrou-se como passo de tempo *h = 5* e o critério de parada é o tempo em questão, ou seja, 30 minutos. Esses estão relacionados entre si, o primeiro indica a dimensão de cada intervalo de iteração até atingir o tempo em estudo. As condições iniciais e as variáveis citadas anteriormente permanecem inalteradas.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Pretende-se encontrar a concentração de sal depois de transcorridos 30 minutos. Dessa forma aplicou-se o PVI na solução geral baseado na solução analítica e o resultado encontrado foi de 6,297376093Kg.

Numericamente, utilizando o mesmo PVI, através do método de Runge-Kutta 4ª ordem e as condições pré-estabelecidas, após 30 interações obteve-se o valor de 6,297376093Kg.

Com isso, podemos inferir que não houveram erros, os valores encontrados foram os mesmos, já que o resultado se alteraria apenas após a 9ª casa decimal. Salientando dessa forma a excelência da aplicação do algoritmo usando o método de Runge-Kutta.

Além disso, é possível analisarmos a tabela a seguir, que organiza os resultados das iterações algorítmicas.

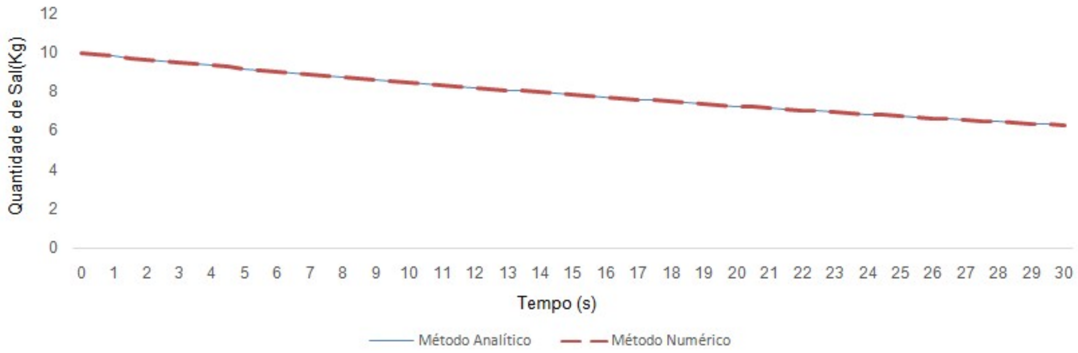
Tabela 1: Iterações no MATLAB

t(s)	Q(kg)
0	10
5	9,21091
10	8,5027
15	7,86527
20	7,29
25	6,76949
30	6,29738

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir apresenta-se um gráfico de tempo (eixo x) em relação à quantidade de sal (eixo y) comparando os valores obtidos analiticamente e os valores obtidos numericamente.

Figura 2 – Gráfico Tempo *versus* Quantidade de sal



Fonte: Elaborada pelo autor

4. CONCLUSÕES

A aplicação de métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas de um PVI é uma alternativa eficaz para a solução de problemas de engenharia e ciências aplicadas.

O método Runge-Kutta sobressae-se em detrimento dos demais métodos numéricos principalmente na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, como demonstrado no presente trabalho, por efeito da precisão de seus resultados e da facilidade em desenvolvê-lo.

O algoritmo elaborado no MATLAB com base nas equações do RK4 evidenciou e fundamentou a competência do método numérico, pois com poucas iterações atingiu-se o resultado esperado e analiticamente o processo não seria tão simples e objetivo.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, E. W.; DIPRIMA, C. R. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. São Paulo: LTC, 2015.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

LUSO ACADEMIA. **Aplicação das equações diferenciais de primeira ordem. Misturas.** Acessado em 24 fev. 2018. Online. Disponível em: https://lusoacademia.org/2016/02/28/aplicacao-das-equacoes-diferenciais-de-primeira-ordem-misturas/.

PALADINO, E. E. **Modelagem Matemática e Simulação Numérica de Trajetórias de Derrame de Petróleo no Mar**. 2000. 126f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Curso de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.

UFRGS. **Cálculo Numérico: um livro colaborativo.** 2018. Acessado em 20 ago. 2018. Online. Disponível em: https://www.ufrgs.br/numerico/livro-oct/pdvi-metodos_de_runge-kutta.html.