

SOLUÇÃO DE UM MODELO DE DISPERSÃO DE POLUENTES AQUÁTICOS A PARTIR DO MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

RENATA KLEIN MORAES¹; GUILHERME JAHNECKE WEYMAR²; BETTINA RODRIGUES MACHADO³; DANIELA BUSKE⁴

¹Universidade Federal de Pelotas – srtklein@gmail.com

²Universidade Federal de Pelotas – guilhermejahnecke@gmail.com

³Universidade Federal de Pelotas – be_rmachado@hotmail.com

⁴Universidade Federal de Pelotas – danielabuske@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento, a industrialização da sociedade e a modernização do modo de vida da sociedade resultaram na introdução de inúmeras substâncias produzidas pelo homem no meio ambiente. Tais substâncias, amplamente utilizadas em todas as facetas da vida, acabam por atingir os corpos hídricos, resultando na degradação da qualidade ambiental e em danos potenciais ao bem-estar de seres humanos, plantas e animais (VOULVOULIS e GEORGES, 2016).

A dispersão de poluentes em cursos d'água naturais é uma questão crítica no campo da engenharia ambiental e, como resultado, os processos que controlam a mistura e o movimento desse fenômeno têm sido extensivamente estudados para a avaliação dos impactos das cargas poluidoras e para a implementação de medidas de controle que visem o gerenciamento de recursos hídricos (SCHMALLE, 2012).

Os custos com monitoramento e pesquisas experimentais são altos, o que torna imprescindível o uso de modelos que estimem o campo de concentração dos poluentes. Uma vantagem dos modelos matemáticos é a capacidade de se adaptarem, de maneira fácil e rápida, a inúmeros cenários (FLECK, 2013).

O transporte de um poluente num meio aquático é normalmente descrito pela Equação de Advecção-Difusão (ADE). Neste trabalho, derivamos a solução analítica dessa equação, em regime estacionário, usando o método de separação de variáveis. O modelo considerado é bidimensional, no plano longitudinal e vertical, com perfil de velocidade e coeficiente de difusividade turbulenta não uniformes.

2. METODOLOGIA

Considerando a equação de advecção-difusão bidimensional, com coeficiente de difusão turbulenta constante, descrita da seguinte maneira:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \varepsilon_z \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \quad (1)$$

onde \bar{c} representa a concentração média do contaminante ($g.m^{-2}$); \bar{u} representa a velocidade média do escoamento ($m.s^{-1}$) na direção x ; e ε_z representa o coeficiente de difusão turbulenta ($m^2.s^{-1}$) na direção z .

A eq. (1) está sujeita às condições de contorno de fluxo nulo no topo e no fundo do rio ou canal:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0, h \quad (1a)$$

e uma fonte de emissão poluidora na posição z_s sujeita à condição representada por uma delta de Dirac:

$$\bar{c}(0, z) = \delta(z - z_s) \text{ em } x = 0 \quad (1b)$$

na qual h é a profundidade do rio (m); δ corresponde a delta de Dirac e z_s é a posição da fonte poluidora (m) na direção z .

A solução deste problema é obtida analiticamente através da separação de variáveis. Este método parte da hipótese de que a eq. (1) pode ser representada em termos do produto de duas funções: $\bar{c}(x, z) = f_1(x)f_2(z)$. Essa simplificação resultará numa equação cujo o lado esquerdo dependerá da variável x e o lado direito dependerá da variável z e, para que a igualdade seja válida, ambos os lados deverão ser iguais a uma mesma constante de separação α .

Com isso, a Equação Diferencial Parcial (EDP) inicial será substituída por duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) que serão solucionadas separadamente. As soluções não triviais para o problema de valor de contorno, dadas por Özisik (1993), serão as autofunções associadas aos autovalores do problema associado de Sturm-Liouville.

Logo, a solução da eq. (1) é dada por:

$$\bar{c}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\frac{-|\alpha_n|}{\bar{u}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{|\alpha_n|}{\varepsilon_z}}z\right) \quad (2)$$

com:

$$A_0 = \frac{1}{h} \cos\left(\sqrt{\frac{|\alpha_0|}{\varepsilon_z}}z_s\right), \quad \text{para } n = 0 \quad (2a)$$

$$A_n = \frac{2}{h} \cos\left(\sqrt{\frac{|\alpha_n|}{\varepsilon_z}}z_s\right), \quad \text{para } n \neq 0 \quad (2b)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para demonstração do comportamento do modelo utilizado, foram utilizados os dados do experimento descrito em Nokes *et al.* (1984). No trabalho, os autores simularam a dispersão de uma solução contendo NaCl em um canal com 15 m de comprimento, 0,15 m de profundidade, 0,56 m de largura, além da velocidade média de 0,55 m/s.

O perfil de velocidade turbulenta utilizado segue aproximadamente o perfil da lei logarítmica dado por (FISCHER *et al.*, 1979):

$$U(Z) = 1 + \frac{u^*}{\bar{u}k} [1 + \ln(Z)] \quad (3)$$

sendo que:

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (3a)$$

O coeficiente de difusão vertical, já adimensionalizado, utilizado na simulação é derivado do perfil de velocidade:

$$\varepsilon_z(Z) = \frac{\bar{u}k}{u^*} Z(1 - Z) \quad (4)$$

Notação: k é a constante de Von Kármán; u^* é a velocidade de atrito ($m.s^{-1}$); \bar{u} é a velocidade média do escoamento ($m.s^{-1}$); τ_0 é a tensão de cisalhamento no fundo do rio ($kg.m^{-2}.s^{-1}$) e ρ é a densidade do fluido ($kg.s^{-3}$).

Para a simulação do caso descrito, foram utilizados os seguintes parâmetros experimentais: $k = 0,35$ e $u^* = 0,055 m.s^{-1}$. A fonte poluidora é pontual e está localizada na posição adimensional $Z_s = 0,75$.

O gráfico da Figura 1 confronta os resultados obtidos na modelagem e os disponíveis na literatura. Com ele pode-se perceber que os resultados preditos pelo modelo possuem uma pequena variação em relação aos experimentais. Acredita-se que essa variação que tiveram os dados confrontados pode ser explicada devido a consideração dos parâmetros físicos como constantes.

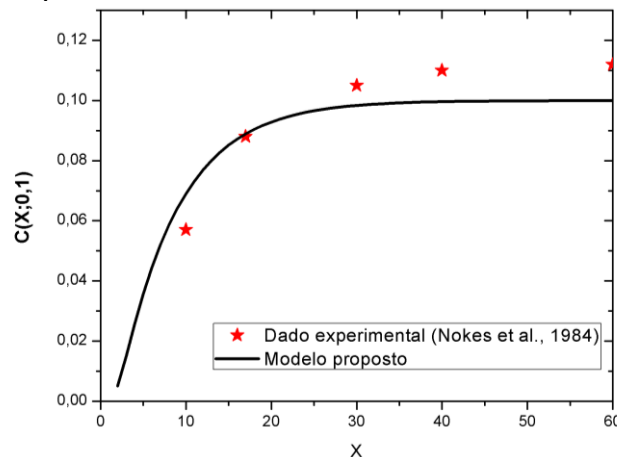


Figura 1: Validação do modelo analítico em $Z = 0,1$ confrontado com os dados experimentais da literatura.

Como o intuito de um modelo de dispersão é prever as zonas críticas de poluição, torna-se imprescindível ter conhecimento do local onde ocorre a máxima concentração de poluentes. Para isso, na Figura 2 foram analisados os gráficos da concentração em função da distância X para as alturas de fonte: $Z_s = 0,2$; $Z_s = 0,5$; $Z_s = 0,75$; $Z_s = 1$.

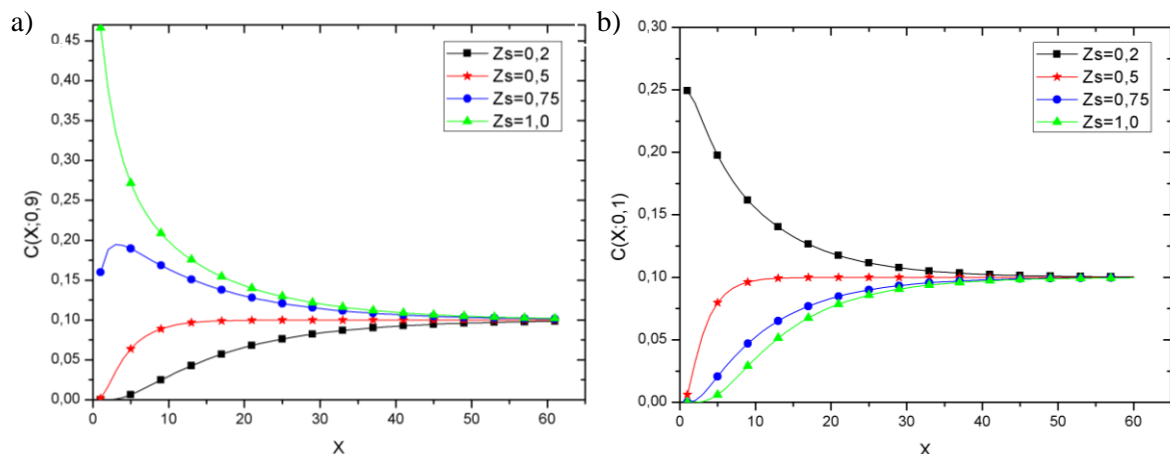


Figura 2: Gráfico da concentração de poluentes C em função da distância X para quatro posições de fonte e profundidade de medição a) 0,9 e b) 0,1.

A comparação entre os gráficos da Figura (2) evidencia que a concentração é mais acentuada quando a fonte está próxima ao ponto inicial de medição do poluente. Para uma melhor explicação, tomando como exemplo o gráfico (2a), em

que a profundidade de medição é de $Z = 0,9$, a maior concentração de poluente se dá quando a fonte de lançamento está localizada em $Z_s = 1,0$.

Observa-se, também, que para todas as alturas de fonte, há uma concentração limite de aproximadamente $C \approx 0,10$. Esse fenômeno é esperado, pois à medida em que o poluente se propaga pelo meio ao qual foi inserido, ele vai se diluindo. Para ambos os gráficos, o poluente se dissolve completamente em uma distância $X > 60$.

4. CONCLUSÕES

Neste estudo, a equação de difusão-advecção bidimensional em regime estacionário foi resolvida pelo método da separação de variáveis, simulando o processo de dispersão de contaminantes em meios aquáticos. Os resultados originados da comparação entre as concentrações simuladas e observadas mostram que o modelo empregado reproduz adequadamente as medidas experimentais. Foi possível constatar uma pequena diferença entre a simulação e o experimento, o que pode ser explicado pela adoção da parametrização turbulenta como constante.

A aplicação desse método possibilitou a obtenção de soluções robustas que contornam os altos custos computacionais associados aos métodos numéricos. Porém, a limitação do método é o fato de não ser aplicável para modelos de dispersão com parametrizações variáveis, apenas constantes.

Com relação aos gráficos de concentração e distância, o modelo gerou resultados esperados e condizentes com a realidade. Apesar de ser um método simplificado, ele se mostrou uma ferramenta coerente no estudo do fenômeno de dispersão de poluentes.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FISCHER, H.; LIST, J.; KOH, R.; IMBERGER, J.; BROOKS, N. **Mixing in Inland and Coastal Waters**. London: Academic Press, 1979.

FLECK, L.; TAVARES, M.; EYNG, E. Principais modelos matemáticos de qualidade da água e suas aplicações: uma revisão. **Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia**, v.1, n.07, p.47-62, 2013.

NOKES, R.; MCNULTY, A.; WOOD, I. Turbulent dispersion from a steady two-dimensional horizontal source. **Journal of Fluid Mechanics**, v.149, p.147-159, 1984.

ÖZISIK, M. **Heat conduction**. John Wiley & Sons, 1993.

SCHMALLE, G. F. **Analytical solution of an advective zone model**. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Iowa State University. Estados Unidos da América. 2012.

VOULVOULIS, N.; GEORGES, K. Industrial and agricultural sources and pathways of aquatic pollution. In: MCKEOWN, A.; BUGYI, G (Ed.). **Impact of water pollution on human health and environmental sustainability**. London: IGI Global, 2016. p. 29-54.