

## MODELOS CONTÍNUOS ESTÁVEIS PODEM APRESENTAR CAOS QUANDO DISCRETIZADOS.

GESIÉLE SANTOS DA ROSA<sup>1</sup>; JOÃO INÁCIO MOREIRA BEZERRA<sup>2</sup>;  
ALEXANDRE MOLTER<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>UFPEl – [geiise2009@hotmail.com](mailto:geiise2009@hotmail.com)

<sup>2</sup>UFPEl – [jimbezerra@inf.ufpel.edu.br](mailto:jimbezerra@inf.ufpel.edu.br)

<sup>3</sup>UFPEl – [alexandre.molter@yahoo.com.br](mailto:alexandre.molter@yahoo.com.br)

### 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma discretização baseada na dependência de densidade de número de descendentes por adulto da equação logística, também conhecida por equação de Verhulst, que é uma equação não linear usada para descrever o comportamento de populações.

Sistemas dinâmicos autônomos discretos, em uma dimensão, podem exibir um comportamento caótico, enquanto as correspondentes equações de evolução contínua (unidimensional) não podem sequer possuir uma solução periódica não trivial (KRIVINE, 2007, KOT, 2001). O objetivo deste trabalho é mostrar o comportamento de dois análogos do mapa logístico, mostrando assim a diferença entre o contínuo e o discreto para essa equação.

### 2. METODOLOGIA

Analisaremos dois modos análogos da equação logística em tempo discreto, que definiremos por modelo 1 e modelo 2, mostrando que esses dois modelos possuem diferentes formas de dependência de densidade e exibem comportamentos diferentes.

Baseado nas análises feitas por (KOT, 2001) num modelo de crescimento populacional, no modelo 1, assumiremos que o número de descendentes é inversamente proporcional a uma função linearmente crescente de número de adultos, e o modelo 2 é uma aproximação direta a equação diferencial logística. Apresentaremos resultados gráficos de simulações computacionais para os dois modelos.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para fins de comparação consideremos a equação logística:

$$\frac{dN}{dt} = r \left( 1 - \frac{N}{K} \right) N, \quad (1)$$

cujas solução exata é:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left( \frac{K}{N_0} - 1 \right) e^{-rt}}. \quad (2)$$

Os modelos apresentados a seguir, são análogos em tempo discreto da equação logística (1).

## Modelo 1:

Considerando que o número de descendentes per capita é inversamente proporcional a uma função linearmente crescente de número de adultos, na equação (1), obtemos:

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = \frac{R}{1 + \left[ \frac{(R-1)}{K} \right] N_t}. \quad (3)$$

Que pode ser escrita como

$$N_{t+1} = \frac{RN_t}{1 + \left[ \frac{(R-1)}{K} \right] N_t}. \quad (4)$$

Que é conhecida como Curva de recrutamento de Beverton-Holt, ela é hiperbólica e monotonicamente crescente. E como em equilíbrio temos que  $N_{t+1} = N_t = N^*$  a equação (4), pode ser escrita da seguinte forma:

$$N^* = \frac{RN^*}{1 + \left[ \frac{(R-1)}{K} \right] N^*}, \quad (5)$$

sendo  $N^* = 0$  e  $N^* = K$  os pontos de equilíbrio. Para determinarmos a estabilidade de cada ponto de equilíbrio, vamos investigar a derivada de (5), em relação a  $N^*$ .

$$f'(N^*) = \frac{R}{\left[ 1 + \left( \frac{R-1}{K} \right) N^* \right]^2}. \quad (6)$$

Para o ponto de equilíbrio  $N^* = 0$ , temos  $f'(0) = R$ , e assim o ponto é instável se  $R > 1$ .

Para  $N^* = K$ , temos  $f'(K) = \frac{1}{R}$ , e assim o ponto é assintoticamente estável para  $R > 1$ .

Temos também, que para  $R > 1$ , pequenas perturbações no ponto de equilíbrio  $N^* = 0$  fazem que eles cresçam geometricamente, enquanto para  $N^* = K$  decaem geometricamente.

Vamos plotar a solução do modelo 1 e a solução da equação logística (2), mostrando que para  $r = 1,11$ ,  $R = 0,11$  e  $k=10$  em ambos, as soluções se comportam de forma similar, conforme mostrado na Figura 1.

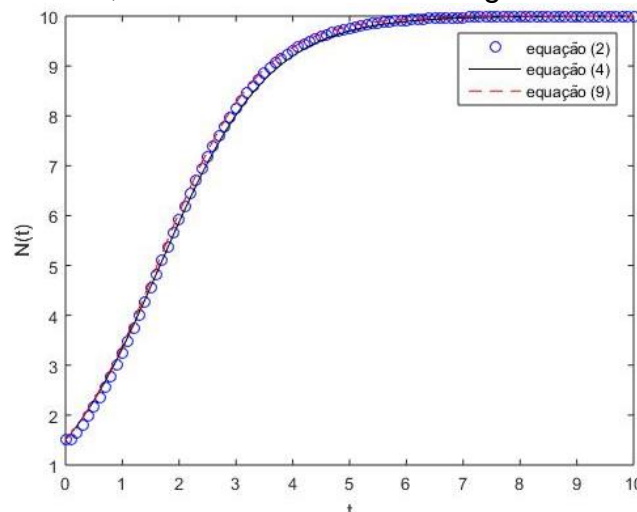


Figura 1: Gráficos das equações (2), (4) e (9) sobrepostas.

## Modelo 2:

Aproximando a derivada do lado esquerdo da equação logística (1) com um quociente de diferenças finitas, temos:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right). \quad (7)$$

O intervalo de tempo é de uma geração  $\Delta t = 1$ , pois estamos em tempo discreto de modo que a equação (7) se reduz a:

$$N_{t+1} - N_t = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right). \quad (8)$$

E assim, chegamos à equação da diferença logística:

$$N_{t+1} = (1 + r)N_t - \frac{r}{K}N_t^2. \quad (9)$$

Podemos redimensionar a equação (9) deixando,

$$x_t \equiv \frac{r}{(1+r)} \frac{N_t}{K} \text{ e } \mu \equiv 1 + r. \quad (10)$$

Assim a equação (9) pode ser substituída por,

$$x_{t+1} = \mu x_t (1 - x_t). \quad (11)$$

A equação (11) tem a vantagem de que o intervalo  $0 \leq x \leq 1$  é invariante para  $0 \leq \mu \leq 4$ , (STROGATZ, 2013).

Os pontos de equilíbrio da equação (9) satisfazem:

$$N^* = (1 + r)N^* - \frac{r}{K}N^{*2}. \quad (12)$$

Para (12) temos dois pontos de equilíbrio:  $N^* = 0$  e  $N^* = K$ . Determinamos a estabilidade por:

$$f'(N^*) = (1 + r) - 2\frac{r}{K}N^*. \quad (13)$$

Para o ponto de equilíbrio  $N^* = 0$ , temos  $f'(0) = 1 + r$ , e assim o ponto é instável se  $r > 0$ .

Para  $N^* = K$ , temos  $f'(K) = 1 - r$ .

A equação (9) apresenta o mesmo comportamento da equação logística (2), conforme mostrado na Figura 1, com  $r = 1,11$  para equação (2) e  $r = 0,11$  para equação (9).

Para outros valores a equação (9) se afasta da Curva de recrutamento de Beverton-Holt. A capacidade de carga ( $K$ ) é assintoticamente estável para  $0 < r < 2$ , para  $0 < r < 1$  as soluções tendem para  $K$ .

Para  $1 < r < 2$ , pequenas perturbações sobre  $K$  retornam a  $K$  de maneira oscilatória. E quando  $r > 2$ , pequenas perturbações em  $K$  divergem, de forma que as trajetórias tendem para um ciclo estável de 2 e a medida que  $r$  aumenta o ciclo de dois aumenta de amplitude até perder estabilidade e duplicar de novo, tendo assim um número infinito de duplicações de período, correspondendo a todos os ciclos de período  $2^n$ .

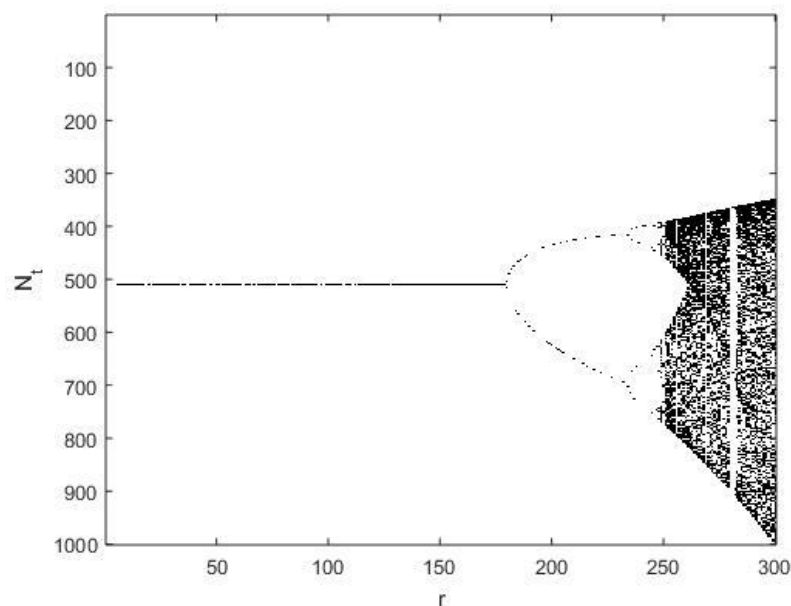


Figura 2: Gráfico da equação (9).

A Figura (2) mostra todas as bifurcações de (9), podemos perceber que os intervalos de duplicação diminuem e os valores de  $r$  em que os ciclos são estáveis convergem para um valor limite  $r_{\infty} = 2,5699456...$

Para  $r_{\infty} < r < 3$ , temos uma região com vários ciclos e orbitas periódica. E a partir de  $r = 3$ , as trajetórias são caóticas, pois são aperiódicas e sensíveis as condições iniciais.

Portanto, não podemos mais prever comportamentos em longo prazo.

#### 4. CONCLUSÕES

Em geral, percebeu-se que um sistema autônomo não linear apresentou diferentes formatos e comportamentos quando discretizado. Em particular, para a equação logística, temos que no contínuo ela apresenta um comportamento monótono crescente enquanto na forma discreta apresentou dois comportamentos distintos, um similar ao contínuo para determinados valores de parâmetros e o outro caótico.

Na sequência deste trabalho serão estudados outros sistemas estáveis no contínuo e que no discreto podem apresentar instabilidade.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

STROGATZ, Steven. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. San Bernardino, Perseus Books Publishing, LLC, 2013. 498p.

KIVRINE, H. LESNE, A. TREINER, J. Discrete-time and continuous-time modelling: some bridges and gaps. **Math. Struct. in Comp. Science**, Cambridge University Press, vol. 17, pp. 261–276, 2007.

KOT, M. **Elements of Mathematical Ecology**. Cambridge University Press, 2001.