HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA DE UM PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO HIPERBÓLICA UNIDIMENSIONAL COM COEFICIENTES CONTÍNUOS E PERIÓDICOS

LARISSA NUNES MEIRELLES DA LUZ[1]; LESLIE D. PÉREZ-FERNÁNDEZ[2]

[1] *Aluna do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat-IFM-UFPel) – larissa.meirelles@hotmail.com*
[2] *Professor do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat-IFM-UFPel) – leslie.fernandez@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Compósitos são constituídos por fases distintas indissoluvelmente unidas e podem ser encontrados na natureza ou fabricados para melhorar as propriedades individuais de seus componentes para uma determinada aplicação. Por exemplo, compósitos com reforços fibrosos são muito utilizados em diversos setores industriais, como o automobilístico, aeronáutico, de construção civil, desportivo, eletroeletrônico, de construção de máquinas e de equipamentos médicos.

A determinação das propriedades globais ou efetivas de compósitos mediante métodos matemáticos serve de orientação na busca experimental de novos materiais com as propriedades ótimas desejadas. Em muitos casos estes materiais possuem uma estrutura periódica, ou seja, são formados por elementos recorrentes. Esta recorrência assegura a existência de um elemento representativo chamado de célula básica que reúne todas as propriedades físicas e geométricas do compósito de interesse e possibilita o emprego de modelos matemáticos com maior eficiência. O estudo numérico direto dos problemas correspondentes, cujas equações têm coeficientes rapidamente oscilantes, não fornece expressões fechadas para as soluções destes sistemas e requer malhas extremamente refinadas que dificultam a sua aplicação devido ao alto custo computacional.

Os métodos de homogeneização matemática permitem encontrar com grande precisão e rigor as propriedades efetivas de um material composto a partir das propriedades físicas e geométricas de seus componentes. Em particular, o Método de Homogeneização Assintótica (MHA - BAKHLOV; PANASENKO, 1989), é utilizado para encontrar os coeficientes que representam as propriedades efetivas de um meio com estrutura periódica. Este consiste na busca da solução do problema na forma de uma expansão assintótica das variáveis de interesse em termos de séries de potência de um parâmetro geométrico ε, $0 < \varepsilon \ll 1$, dado pela razão entre o comprimento característico da célula básica do compósito por um comprimento característico do compósito.

Para cada ε fixo, consideramos o seguinte problema de valores de contorno para a equação hiperbólica com deslocamento u^ε:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right) = f(x,t) \\ u^\varepsilon(0,t) = u^\varepsilon(1,t) = 0,\ t > 0 \\ u^\varepsilon(x,0) = v(x),\ x \in (0,1) \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x,0) = q(x),\ x \in (0,1) \end{cases} \tag{1}$$

onde a, f, v e q, são funções diferenciáveis, que representam a densidade de massa, a propriedade elástica(módulo de Young) da corda, a força do corpo, e os deslocamentos e velocidades iniciais, $a(x/\varepsilon)$ é ε-periódica, positiva e limitada, e ainda, devem ser satisfeitas as condições de compatibilidade $v(0) = v(1) = 0$. Objetivo deste trabalho é resolver analiticamente o problema (1) pelo MHA.

2. METODOLOGIA

O MHA garante que a solução do problema original (1) converge para a solução do problema homogeneizado quando o parâmetro geométrico tende a zero, assumindo uma solução na forma de uma série assintótica em duas escalas (x e $y = x/\varepsilon$) em potências de ε chamada solução assintótica formal, originando uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes $u_k(x,y)$ das potências de ε, continuamente diferenciáveis em x e y, e 1-periódicos em y. Os problemas para os dois primeiros termos da assintótica são os chamados problemas homogeneizado e local, respectivamente. O lema a seguir garante a existência de soluções u_k 1-periódicas da sequência de problemas:

Lema (BAKHLOV; PANASENKO, 1989): Seja $F(y)$ diferenciável e $a(y)$ diferenciável por partes, 1-periódica, positiva e limitada. A condição necessária e suficiente para que a solução 1-periódica equação $LN = F$, com o operador diferencial $L(\cdot) = \frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{d(\cdot)}{dy}\right)$, exista é que $\langle F(y)\rangle \equiv \int_0^1 f(y)dy = 0$, onde $\langle\cdot\rangle$ é o operador do valor médio. ■

Consideramos a seguinte expansão assintótica da solução do problema:

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y), \qquad y = \frac{x}{\varepsilon}$$

Na substituição de $u^{(2)}$ no problema (1), utilizamos a regra da cadeia:

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} \approx \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}$$

a partir daqui, x e y consideram-se independentes.

Agrupando por potências de ε o resultado da substituição em $(1)_1$ obtém-se a igualdade assintótica

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) + \varepsilon^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right\} \\
&+ \varepsilon^0\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\right. \\
&\left.+ f(x,t)\right\} + \varepsilon\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right\} \\
&+ \varepsilon^2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(a(y)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right\} = O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de ε^{-2}, ε^{-1} e ε^0 devem ser nulos, de onde:

$$\varepsilon^{-2}: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] = 0$$

$$\varepsilon^{-1}: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]$$

$$\varepsilon^0: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right] + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x,t)$$

Estas equações são complementadas com as condições de contato que resultam de substituir $u^{(2)}$ em $(1)_{2,3}$ e condições para garantir a unicidade.

$$
\varepsilon^0:\begin{cases} u_0(0,0,t)=0\\ u_0\left(1,\dfrac{1}{\varepsilon},t\right)=0\\ u_0\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon},0\right)=v(x)\\ \dfrac{\partial u_0}{\partial t}\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon},0\right)=q(x)\end{cases},\quad
\varepsilon^1:\begin{cases} u_1(0,0,t)=0\\ u_1\left(1,\dfrac{1}{\varepsilon},t\right)=0\\ u_1\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon},0\right)=0\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon},0\right)=0\end{cases},\quad
\varepsilon^2:\begin{cases} u_2(0,0,t)=0\\ u_2\left(1,\dfrac{1}{\varepsilon},t\right)=0\\ u_2\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon},0\right)=0\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}\left(x,\dfrac{x}{\varepsilon},0\right)=0\end{cases}
$$

De aplicar o Lema na equação para ε^{-2} segue que existe u_0 solução 1-periódica. Logo, integrando com relação a y e após aplicando o operador $\langle\cdot\rangle$ em ambos os lados da igualdade levando em conta a 1-periodicidade de u_0 e a positividade de $a(y)$, temos:

$$
0=\langle \partial u_0/\partial y\rangle = k(x)\langle a^{-1}(y)\rangle \Rightarrow\ k(x)=0 \Rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y}=0 \Rightarrow u_0=u_0(x,t).
$$

Assim, utilizando o resultado acima, a equação para ε^{-1} modifica-se em

$$
\varepsilon^{-1}: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\right].
$$

De aplicar o Lema nesta equação para ε^{-1} levando em conta a 1-periodicidade de $a(y)$, segue que existe u_1 solução 1-periódica. Logo, integrando com relação a y e aplicando o operador $\langle\cdot\rangle$ levando em conta a 1-periodicidade de u_1, temos:

$$
\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{k(x)}{a(y)} \Rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial x}=k(x)\langle a^{-1}(y)\rangle \Rightarrow k(x)=\hat{a}\frac{\partial u_0}{\partial x}, \hat{a}=\langle a^{-1}(y)\rangle^{-1}
$$

$$
\Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial y}=\left(\frac{\hat{a}}{a(y)}-1\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} \Rightarrow u_1(x,y)=N_1(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}, N_1(y)=\int_0^y\left(\frac{\hat{a}}{a(s)}-1\right)ds
$$

onde $\hat{a}$ é o chamado coeficiente efetivo.

De aplicar o Lema na equação para ε^0 segue que a condição necessária e suficiente para que exista u_2 solução 1-periódica é a equação do problema homogeneizado

$$
\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\hat{a}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=f(x,t).
$$

Supondo que a solução $u_2=N_2(y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ obtém-se que $N_2(y)$ é uma função 1-periódica, dada por

$$
N_2(y)=\int_0^y\left(\frac{\langle N_1(y)\rangle\,\hat{a}}{a(s)}-N_1(s)\right)ds.
$$

Teremos então a solução assintótica formal

$$
u^{(2)}(x,t,\varepsilon)=u_0(x,t)+\varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}+\varepsilon^2 N_2(y)\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2},
$$

onde u_0 é a solução do problema homogeneizado

$$
\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\hat{a}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=f(x,t), \qquad x\in(0,1), \qquad t>0\\ u_0(0,t)=u_0(1,t)=0, \qquad t>0\\ u_0(x,0)=v(x),\ \dfrac{\partial u_0}{\partial t}(x,0)=q(x),\ x\in(0,1)\end{cases}
$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Podemos estabelecer uma relação de proximidade entre a solução do problema original u^εe a solução do problema homogeneizado u_0 para avaliar quão boa aproximação é u_0 de u^ε quando $\varepsilon \to 0^+$. Especificamente, vamos provar que para todo $T > 0$ fixo, cumpre-se $\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, onde $H^1(\Omega)$ é o espaço das funções de $L^2(\Omega)$ (funções de quadrado integrável) cujas derivadas de primeira ordem também são de $L^2(\Omega)$. Na demonstração utilizaremos o princípio do máximo generalizado para equações hiperbólicas (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Demonstração:

Primeiro, utilizando a expansão assintótica, vamos provar que

$$\left\|u^\varepsilon - u^{(2)}\right\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])}.$$

Substituindo a assintótica no problema (1) tem-se, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a^\varepsilon(x)\dfrac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right] = f(x,t) - F(x,t,\varepsilon), (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^{(2)}(x,0,\varepsilon) = v(x), x \in (0,1),\ u^{(2)}(0,t,\varepsilon) = u^{(1)}(1,t,\varepsilon) = 0, t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \quad (2)$$

em que F é erro de $u^{(2)}$. Subtraindo (2) de (1) temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(u^\varepsilon - u^{(2)}) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a^\varepsilon(x)\dfrac{\partial}{\partial x}(u^\varepsilon - u^{(2)})\right] = F(x,t,\varepsilon), \qquad (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x,0) - u^{(2)}(x,0,\varepsilon) = 0, \qquad x \in (0,1) \\ u^\varepsilon(0,t) - u(0,t,\varepsilon) = u^\varepsilon(1,t) - u^{(2)}(1,t,\varepsilon) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Ao aplicarmos o princípio do máximo temos, para cada $\mathrm{T} > 0$,

$$\left\|u^\varepsilon - u^{(2)}\right\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} \le c(T)\|F\|_{L^2([0,1]\times[0,T])}.$$

em que $c(T)$ é uma constante. É possível provar que $\|F\|_{L^2([0,1]\times[0,T])} \le \sqrt{\varepsilon}AB^2\sqrt{T}$, em que A e B são constantes cuja existência é garantida pelo teorema de Weierstrass (KUDRIAVTSEV, 1983). Logo, como $\|F\|_{L^2([0,1]\times[0,T])} = 0(\sqrt{\varepsilon})$ tem-se que $\left\|u^\varepsilon - u^{(2)}\right\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} = O(\sqrt{\varepsilon})$.

Podemos mostrar de modo análogo que $\left\|u^{(2)} - u_0\right\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} = O(\sqrt{\varepsilon})$.

A partir desses resultados e da desigualdade triangular teremos

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} &\le \left\|u^\varepsilon - u^{(2)}\right\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} + \left\|u^{(2)} - u_0\right\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} \\ &= O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) + O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \\ &= O\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

o qual prova a relação de proximidade, ou seja, u_0 é uma boa aproximação para u^ε quando $\varepsilon \to 0^+$. ■

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho aplicou-se o método de homogeneização assintótica a um problema de valor de contorno para a equação hiperbólica unidimensional com coeficientes contínuos e provou-se a proximidade entre a soluções exata u^ε e assintótica formal $u^{(2)}$ e a solução u_0 do problema homogeneizado que método é realmente eficaz, pelo fato de que $u^\varepsilon \to u_0$ e $u^{(2)} \to u_0$ quando $\varepsilon \to 0^+$.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

KUDRIAVTSEV, L. D. **Curso de Análisis Matemático**. Tomo I. Moscou: Mir, 1983.