DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO PARA A VISUALIZAÇÃO DO CAOS: UM EXEMPLO NO SISTEMA DE RÖSSLER

JOÃO INÁCIO MOREIRA BEZERRA[1]; GESIELE SANTOS DA ROSA[2]; ALEXANDRE MOLTER[3]

[1]*UFPel(Universidade Federal de Pelotas) – jimbezerra@inf.ufpel.edu.br*
[2]*UFPel(Universidade Federal de Peloas) – geiise2009@hotmail.com*
[3]*UFPel(Universidade Federal de Pelotas) – alexandre.molter@yahoo.com.br*

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da história da ciência, os sistemas naturais sempre atraíram muito o interesse dos pesquisadores das mais diversas áreas. Na Matemática, isso ocorre desde quando Isaac Newton mostrou ser possível modelar estes sistemas matemáticamente, por intermédio de equações diferenciais(PALIS, 1994). Estes sistemas podem ser de equações lineares, nos quais as soluções são obtidas analitacamente, ou não lineares, em que as equações são tratadas por métodos numéricos ou analisadas geométricamente, podendo analizar-se as trajetórias, nas quais a curva é vista como um caminho, o plano de fase, em que compara-se as trajetórias de uma variável em relação à outra(s) e também o retrato de fase, sendo este um conjunto representativo de trajetórias.

As soluções, ou o comportamento destes sistemas, dependem de certos valores, chamados de parâmetros. Estes são objeto de vários estudos na Matemática, visto que uma pequena perturbação nas condições iniciais de grandes sistemas podem levar a mudanças drásticas nas soluções. Esse comportamento foi primeiramente observado por Lorenz, em 1963, que resumiu esta situação nove anos mais tarde, chamada de efeito borboleta, com a seguinte afirmação: “O bater de asas de uma borboleta no Brasil pode ocasionar um tornado no Texas”(LORENZ, 1972).

A Teoria do Caos foi bastante revolucionária, por ter acabado com a Era Determinística, na qual acreditava-se que todo evento era previsível, de acordo com situações que tivessem ocorrido no passado. Atualmente, é estudado nas mais diversas áreas, tais como a Meteorologia(Sistema de Lorenz), dinâmica populacional(Mapa Logístico e o sistema de Lotka-Volterra) e análise de circuitos(Circuito de Chua).

Neste trabalho, o objetivo foi desenvolver um programa no software MATLAB, com o intuito de mostrar o comportamento caótico do sistema de Rössler(RÖSSLER, 1976), primeiro mostrando o comportamento da variável x ao longo do tempo para certos valores de um parâmetro, e então traçando o diagrama de bifurcação, que é a representação gráfica do comportamento qualitativo das órbitas para cada valor de um parâmetro dentro de um intervalo.

2. METODOLOGIA

O sistema de Rössler é descrito pelas seguintes equações:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$

$$\frac{dz}{dt} = b + (x - c)z$$

Onde a, b e c são parâmetros(positivos).

Como o sistema é não linear, é inviável a obtenção da solução analítica do sistema. Portanto, para as duas aplicações, a solução foi obtida usando o comando ode45 do MATLAB, que possui três parâmetros:

- O sistema a ser solucionado. No caso deste trabalho, o sistema de Rössler.
- O intervalo de tempo em que o sistema é resolvido. No trabalho, foi 0 a 500, com passo(t(i+1) – t(i)) de 0,1, sendo um total de 5000 pontos.
- As condições iniciais do sistema. Neste trabalho, as condições iniciais foram valores randômicos para *x*, *y* e *z*.

Para análise, os parâmetros *a* e *b* irão se manter constantes em 0,1. O parâmetro *c* irá mudando de valor, entre 1 e 45, com tamanho de passo = 0,1.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

No estudo deste sistema, será analisado o comportamento da variável *x* ao longo do tempo, para diferentes valores do parâmetro *c*.

- Para valores de c entre 1 e 4, o comportamento da variável é bastante previsível, com os pontos de máximo e mínimo se repetindo com período unitário, como demonstra a Figura 1.
- Com $c = 6$, o comportamento ainda é previsível, porém, agora, o período é duplicado, ou seja, existem dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo.
- Com $c = 8{,}5$, o período novamente é duplicado, ficando quatro vezes maior que o inicial, como demonstra a Figura 3.
- Com $c = 8{,}7$ o período vai para 8, como pode ser observado na Figura 4. Percebe-se que quanto mais o período vai aumentando, mais o sistema tende ao caos, que pode ser observado com $c = 9$, na Figura 5.

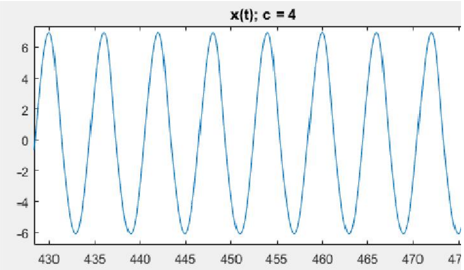

Figura 1: c = 4

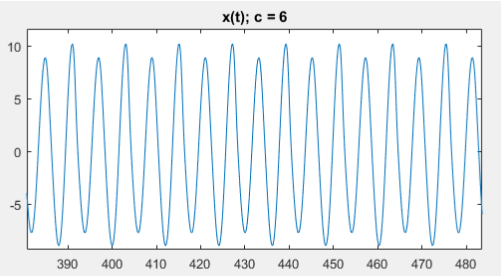

Figura 2: c = 6

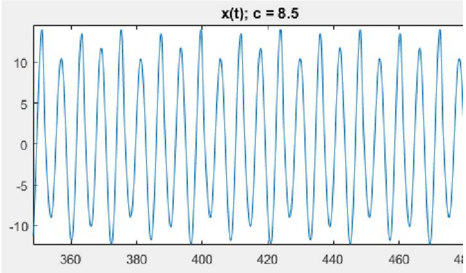

Figura 3: c = 8,5

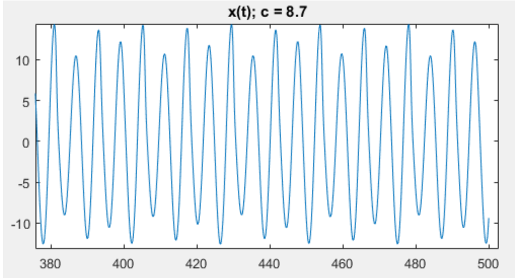

Figura 4: c = 8,7

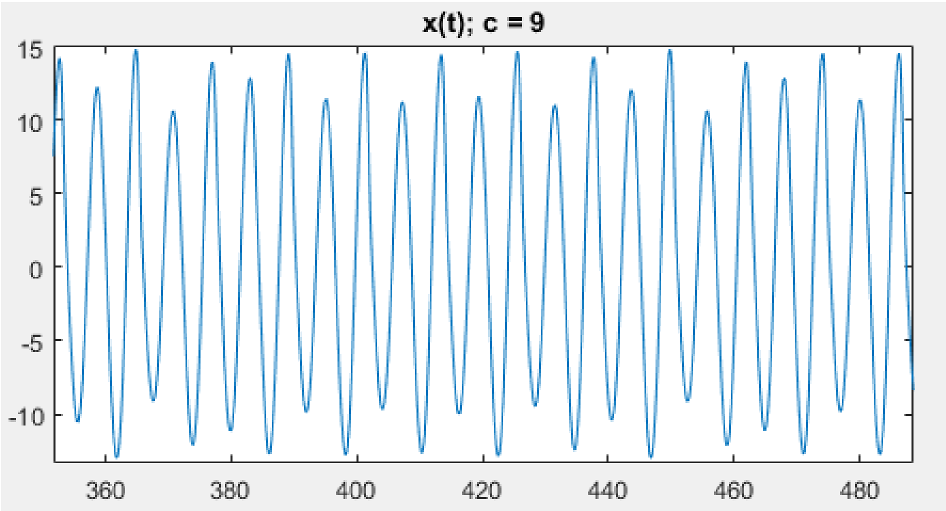

Figura 5: c = 9

Para mostrar tudo isso de uma maneira mais eficaz, na Figura 6 serão mostrados os resultados da variável *x* em relação ao parâmetro *c*, no diagrama de bifurcação. Para construí-lo, inicialmente passamos para um vetor todos os valores que *x* possui a partir do momento em que $t \geq 400$. Então, iteramos sobre o vetor, e se ele for um ponto de máximo, o que é verificado comparando-o com o seu sucessor e seu antecessor no vetor, tendo ele que ser maior que ambos para ser plotado no gráfico. Desta forma, a medida que mais pontos são plotados, mais o sistema se aproxima do comportamento imprevisível, ou seja, caótico.

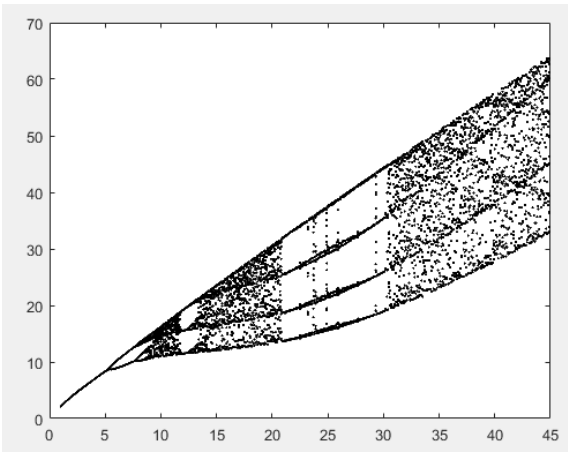

Figura 6: Diagrama de bifurcação de *x* em relação ao parâmetro *c*.

4. CONCLUSÕES

No presente trabalho apresentou-se uma maneira de trabalhar com sistemas não lineares, mostrando que embora eles, em sua grande maioria, não possuam solução analítica viável, há várias formas que podem ser analisados geometricamente, que permitem um bom entendimento sobre o comportamento do sistema. Desta forma, foi possível mostrar o quanto pequenas alterações no parâmetro c resultaram em mudanças consideráveis no comportamento da variável x.

Como continuação desse trabalho, pretende-se estudar mais sobre esses sistemas não lineares e seus comportamentos, com um dos objetivos finais ser a produção de um artigo que possibilite aos pesquisadores bom entendimento de como programar os diagramas de bifurcações e demais características do caos, o que foi uma das grandes dificuldades do trabalho. Além disso, a performance do programa deve ser melhorada, posto que a execução levou nove minutos, no MATLAB, sendo que sistemas futuros que virão a ser estudados possuem um número de pontos consideravelmente maior a serem analisados.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHAGAS, T.P.(2012). Optimal feedback control of the forced van der Pol system. Chaos, Solitons & Fractals. Ed. 45. Pg 1147-1156.

LORENZ, E.N.(1963). Deterministic non periodic flow. J. Atmosph. Sci, 20, 130-141.

LORENZ, E.N.(1972). Predictability: does the flap of a butterfly’s wing in Brazil set off a tornado in Texas? 139th Annual Meeting of American Association for the Advancement of Science(29 Dec 1972).

PALIS, J.(1994). **Dinâmica não-linear, sistemas caóticos e aplicações.** São Paulo, SP. Estudos Avançados, vol. 8, no. 20. Jan. - Abr. 1994.

RÖSSLER, O.(1976). **An equation for continous chaos.** Physics Letters A. Volume 57, Issue 5. Pg 397-398.

STROGATZ, S.H.(2000). **Nonlinear Dynamics and Chaos.** Cambridge, MA, USA. Westview Press. Dez. 2000.