COMBINAÇÃO DO MÉTODO DA HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA COM A TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA RESOLVER UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA COM COEFICIENTE RAPIDAMENTE OSCILANTE

AMANDA MALLÜE FERREIRA [1]; LESLIE D.PÉREZ FERNÁNDEZ [2]; CAMILA PINTO DA COSTA[3]

[1] *Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática(PPGMMat), instituto de Física e Matemática(IFM), Universidade Federal de Pelotas – amandamallue@hotmail.com*
[2] *Professor do Prorama de Pós-Graduação em Modelagem Matemática(PPGMMat-IFM-UFPel – Leslie.fernandez@ufpel.edu.br*
[3] *Professor(a) do Prorama de Pós-Graduação em Modelagem Matemática(PPGMMat-IFM-UFPel – camiladacosta@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

O método de homogeneização assintótica (MHA) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) permite transformar um problema sobre um meio micro-heterogêneo, periódico, caracterizado por coeficientes rapidamente oscilantes (problema original), em outro sobre um meio homogêneo (problema homogeneizado) assintoticamente equivalente ao heterogêneo. Os coeficientes das equações diferenciais correspondentes ao problema homogêneo são chamados coeficientes efetivos do meio heterogêneo. A obtenção de tais coeficientes efetivos depende da solução dos chamados problemas locais, ou seja, sobre a célula básica cuja replicação periódica gera o meio heterogêneo.

A transformada de Laplace (LOGAN, 2004), é um método de transformadas integrais, onde permite transformar os problemas no caso, de equações diferenciais ordinárias em equações algébricas e no caso de equações diferenciais parciais em equações com dimensão espacial menor.

O objetivo deste trabalho consiste na combinação de dois métodos, O método da Homogeneização assintótica com a Transformada de Laplace para resolver uma equação parabólica com condições de contorno e inicial, com coeficiente rapidamente oscilante e assim apresentar os resultados através de um exemplo numérico.

2. METODOLOGIA

Aplica-se a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{.\}$, na equação original com relação á variável temporal. Posteriormente assumimos uma solução na forma de série assintótica em potências de ε, chamada solução assintótica formal (S.A.F), originando uma sequência recorrente de problemas. A partir destes problemas encontrados vamos obter a equação do problema local e a equação do problema homogeneizado. Quando $\varepsilon \to 0^+$, a solução do problema original converge para a solução do problema homogeneizado.

Seja a equação parabólica dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k^\varepsilon(x)\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right) = f(t), (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(0,t) = u^\varepsilon(1,t) = 0, t \in \ \mathbb{R}_+^*;\ u^\varepsilon(x,0) = 0, x \in [0,1] \end{cases} \tag{1}$$

onde, s é a variável da transformada de Laplace, u^εé a temperatura na posição x, para cada ε fixo, e seja ε um parâmetro geometrico pequeno $0 < \varepsilon \ll 1$, em que ε indica a existência de duas escalas estruturais (micro e macroescala).

Através da aplicação da transformada de Laplace no problema original, teremos:

$$\begin{cases} sv^{\varepsilon} - \frac{d}{dx}\left(k^{\varepsilon}(x)\frac{dv^{\varepsilon}}{dx}\right) = F(s) \\ v^{\varepsilon}(0,s) = v^{\varepsilon}(1,s) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

utilizando a notação v^{ε} para representar a transformada de Laplace de u^{ε}, e k^{ε} o coeficiente de condutividade térmica, ε –periódico, positivo, e limitado. E $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$.

O método da homogeneização assintótica consiste em propor uma solução assintótica formal da seguinte forma:

$$v^{(2)}(x,s,\varepsilon) = v_0(x,y,s) + \varepsilon v_1(x,y,s) + \varepsilon^2 v_2(x,y,s), y = \frac{x}{\varepsilon} \tag{3}$$

Substituindo a solução assintótica formal no problema já transformado, aplicando a regra da cadeia e organizando os termos de mesma potência de ε, teremos a seguinte sequência recorrente de problemas:

$$\mathcal{L}_{yy}v_0 = 0;\ \ v_0(0,0) = v_0(1,0) = 0$$
$$\mathcal{L}_{yy}v_1 + \mathcal{L}_{xy}v_0 + \mathcal{L}_{yx}v_0 = 0;\ \ v_1(0,0) = v_1(1,0) = 0$$
$$\mathcal{L}_{yy}v_2 + \mathcal{L}_{xx}v_0 + \mathcal{L}_{xy}v_1 + \mathcal{L}_{yx}v_1 + sv_0 - F(s) = 0;\ \ v_2(0,0) = v_2(1,0) = 0$$

sendo $\mathcal{L}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$.

O problema local é dado por:

$$PL: \begin{cases} \frac{d}{dy}\left(k(y)\frac{dN_1}{dy}\right) = -\frac{dk}{dy} \\ N_1(0) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

o coeficiente efetivo é da seguinte maneira: $\hat{k} = \left(\int_0^1 \frac{dy}{k(y)}\right)^{-1}$.

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{k}}{k(s)} - 1\right) ds \tag{5}$$

O problema homogeneizado é dado por:

$$PH: \begin{cases} sv_0(x,s) - \hat{k}\frac{d^2v_0}{dx^2} = F(s), x \in (0,1) \\ v^{\varepsilon}(0,s) = v^{\varepsilon}(1,s) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

É importante salientarmos a importância do problema homogeneizado, pois este descreve o comportamento do meio homogêneo equivalente ao problema heterogeneo original.
A solução assintótica do problema original:

$$u^{(1)}(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t) + \varepsilon\, N_1(y)\frac{\partial v_0}{\partial x}. \tag{7}$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A fim de avaliar o desempenho do método da homogeneização assintótica combinado com a transformada de Laplace, apresentamos resultados obtidos através de um exemplo numérico. Seja $k(y) = 1 + 0.25\cos(2\pi y)$, e a fonte $f(t) = e^{-t}$.

Através dos resultados apresentados a cima, considerando a expansão assintótica de primeira ordem:

$$u^{(1)} = u_0(x,t) + \varepsilon\, N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x} \tag{8}$$

Vamos obter:

- Coeficiente efetivo:

$$\hat{k} = \frac{\sqrt{15}}{4} \tag{9}$$

- O termo N_1será:

$$N_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,tan(\pi y)\right) - y,\ \ se\ 0 < y < 1/2 \\ 0, \quad se\ y = 1/2 \\ \frac{1}{\pi}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,tan(\pi y)\right) - y + 1,\ \ se\,\frac{1}{2} < y < 1 \end{cases} \tag{10}$$

- O termo u_0, como:

$$u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}[v_0(x,s)] \tag{11}$$

$$v_0 = \frac{F(s)}{s}\left[1 - \frac{senh\left\{\sqrt{\frac{s}{\hat{k}}}x\right\} - senh\left\{\sqrt{\frac{s}{\hat{k}}}(x-1)\right\}}{senh\sqrt{\frac{s}{\hat{k}}}}\right] \tag{12}$$

devido à dificuldade de inversão de forma analítica, utilizou-se o algoritmo de inversão Talbot Fixo (ABATE; VALKÓ, 2004).

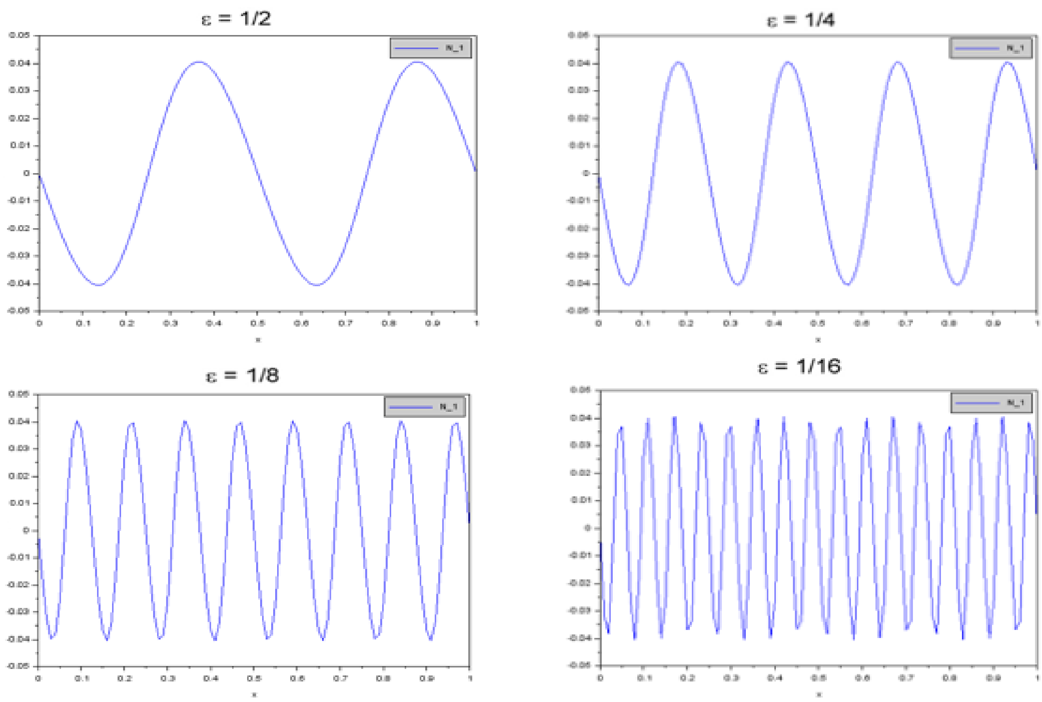

Figura 1 Variação do coeficiente de condutividade, para diferentes valores de ε.

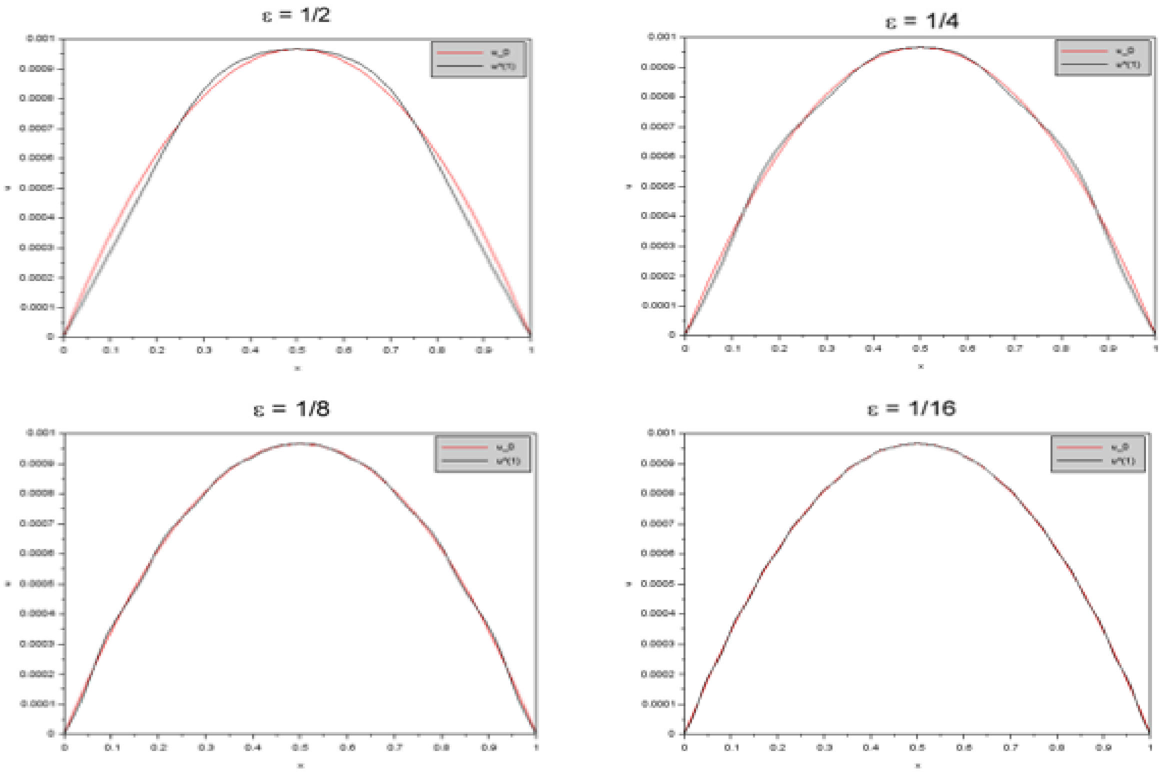

Figura 2: perfis espaciais de u_0 e $u^{(1)}$

4.CONCLUSÕES

Neste trabalho aplicou-se o método de homogeneização assintótica combinado com a transformada de Laplace, e através da aproximação entre a solução assintótica formal e a solução do problema homogeneizado. Podemos observar as curvas mostradas na figura 2 obtida através do exemplo numerico apresentado.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LOGAN, J. D. **Applied Partial Differential Equations.** [S.I]: Springer Science & Business Media, 2004.

BAKHVALOV, N.S: PANASENKO, G.P. Homogenisation: averaging processes in periodic media. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

ABATE, J.;VALKÓ, P. P. Multi-precision Laplace transform inversion. **International Journal for Numerical Methods in Engineering,**[S.I.], v.60, n.5, p.979-993, 2004.