PyRDMIA: UM PACOTE INTERVALAR EM PYTHON PARA RDM-IA

DIRCEU A. MARASCHIN JR.[1]; LUCAS M. TORTELLI[2]; ALINE B. LORETO[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas – dmaraschin@inf.ufpel.edu.br
[2]Universidade Federal de Pelotas – lmtortelli@inf.ufpel.edu.br
[3]Universidade Federal de Santa Maria – aline.loreto@ufsm.br

1. INTRODUÇÃO

No trabalho com dados numérico em ambientes computacionais, a aritmética intervalar apresenta vantagens sobre a aritmética convencional real. Erros numéricos são recorrentes nesse tipo de processo, ocasionados por diversos motivos como, por exemplo, arredondamentos, truncamentos e inerente aos dados iniciais. Nesse sentido, a aritmética intervalar promove controle automático de erros e ainda possui métricas próprias para a estimativa de qualidade do resultado.

A representação de um valor real em intervalo é dada por: $x=[x]=[\underline{x},\overline{x}]$ pelo método de extensão intervalar (FERSON *et al.,* 2001). Historicamente, a primeira definição intervalar foi SIA (*Standard Interval Arithmetic*), desenvolvida por MOORE (1966). Ainda que seja a definição intervalar mais utilizada no contexto científico, SIA apresenta falhas, o que proporcionou o desenvolvimento de outras aritméticas intervalares no intuito de solucionar essas inconsistências e ampliar a gama de problemas solucionáveis utilizando intervalos.

Uma das definições mais atuais para aritmética intervalar é a chamada RDM-IA, de PIEGAT; LANDOWSKI (2012, 2013). Tendo em vista que a definição de RDM-IA só existe em termos teóricos, o presente trabalho tem como objetivo apresentar o desenvolvimento de um pacote intervalar desenvolvido na linguagem Python para esta aritmética, denominado PyRDMIA. Justifica-se inicialmente pela possibilidade de aplicação a problemas em geral, podendo beneficiar-se das vantagens apresentadas acerca de RDM-IA. Soma-se o fato de a literatura explanar vantagens do uso de RDM-IA frente à SIA. A usabilidade da biblioteca será demonstrada por meio da computação de funções que pertencem a um grupo de problemas de minimização global.

2. ARITMÉTICA INTERVALAR MULTIDIMENSIONAL RDM

A aritmética RDM-IA carrega o conceito de multidimensionalidade pelo fato de atribuir uma variável de incerteza a cada novo parâmetro do problema. Dessa forma, RDM-IA significa "medida da distância relativa" – do inglês, *Relative Distance Measure – Interval Arithmetic,* onde α é chamada de variável RDM, representando a incerteza contida em cada valor envolvido no cálculo.

Uma quantidade é representada em um intervalo RDM da seguinte forma:

$$[x]=\{x:x=\underline{x}+\alpha_x(\overline{x}-\underline{x}),\alpha_x\in[0,1]\},$$

dessa forma, os infinitos valores compreendidos entre os limites do intervalo podem ser considerados, diferentemente da maioria das demais ariméticas intervalares. Considerando $[x]$ e $[y]$, as operações básicas em RDM-IA são definidas seguindo a forma geral expressa pela Equação (1).

$$[x]*[y]=[min\{[x]*[y]\},max\{[x]*[y]\}] \quad (1)$$

As operações de *min* e *max* servem justamente para extrair da série de valores gerados, os valores que compõem os limites do intervalo solução. A partir disso, as operações são apresentadas abaixo.

$$[x]+[y]=\{\underline{x}+\alpha_x(\overline{x}-\underline{x})+\underline{y}+\alpha_y(\overline{y}-\underline{y});\alpha_x,\alpha_y\in[0,1]\}; \quad (2)$$
$$[x]-[y]=\{\underline{x}+\alpha_x(\overline{x}-\underline{x})-\underline{y}-\alpha_y(\overline{y}-\underline{y});\alpha_x,\alpha_y\in[0,1]\}; \quad (3)$$
$$[x].[y]=\{[\underline{x}+\alpha_x(\overline{x}-\underline{x})].[\underline{y}+\alpha_y(\overline{y}-\underline{y})];\alpha_x,\alpha_y\in[0,1]\}; \quad (4)$$
$$[x]/[y]=\{[\underline{x}+\alpha_x(\overline{x}-\underline{x})]/[\underline{y}+\alpha_y(\overline{y}-\underline{y})];\alpha_x,\alpha_y\in[0,1]\}. \quad (5)$$

A aritmética multidimensional RDM atende a quase todas as propriedades matemáticas da aritmética real convencional, podendo ser encontradas em (LANDOWSKI, 2017). Essas propriedades possuem extrema relevância para transformações e soluções algébricas.

3. PyRDMIA

Desenvolvida em Python, a implementação da biblioteca PyRDMIA segue a definição teórica acerca da Aritmética Multidimensional RDM. O pacote foi desenvolvido com o objetivo principal de disponibilizar um pacote completo para o desenvolvimento científico, permitindo o uso de intervalos sob os conceitos de uma aritmética intervalar moderna em vista de outros que implementam SIA.

O pacote intervalar PyRDMIA teve seu desenvolvimento seguindo os padrões do relatório IEEE 754, para aritméticas intervalares, e também ao GPL, de forma a oferecer uma biblioteca de livre acesso e *open-source*.

3.1. Arquitetura de PyRDMIA

O desenvolvimento de PyRDMIA seguiu a estrutura apresentada na Figura 1, visando torná-la flexível e facilmente escalável.

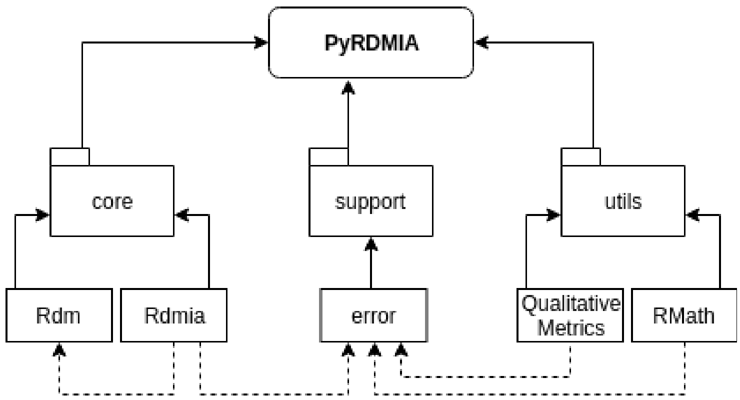

Figura 1: Arquitetura de PyRDMIA.

A classe *Rdm* constitui a menor unidade de informação dentro da biblioteca, enquanto que *Rdmia* provê métodos para manipulação dos números em RDM. Nesta classe também é definida a precisão de operação da biblioteca, definida em $1x10^{-2}$, por padrão. A partir desta, as operações padrão mais simples e operações unárias podem ser definidas. Estas operações estão alocadas na classe *Rdm* que, junto de *Rdmia*, compõe o núcleo operacional de PyRDMIA.

As demais classes que compõem a biblioteca PyRDMIA:

- ***error:*** comporta o tratamento de exceções, garantindo a integridade das operações e confiabilidade ao operar com valores intervalares;
- ***QualitativeMetrics:*** implementada as métricas para análise numérica para resultados intervalares: erro absoluto, erro relativo e diâmetro;
- ***Rmath:*** comporta operações definidas adicionalmente como forma de ampliar a capacidade de operação e aplicações para PyRDMIA.

Com esta estrutura, PyRDMIA possui plena viabilidade e operabilidade no desenvolvimento de soluções numéricas utilizando intervalos. Sua compatibilidade com a biblioteca *Numpy* oferece confiabilidade em processos com quantidades numéricas utilizando Python, além de multiplataforma. Em vista disso, PyRDMIA atende: i) alta exatidão numérica; ii) extensão do espaço IR; iii) operabilidade multiplataforma; iv) tratamento de exceções; v) flexibilidade para o desenvolvimento de aplicações utilizando intervalos.

3.1. Operações disponíveis em PyRDMIA

A operabilidade de PyRDMIA é garantida por meio das operações que se faz capaz de processar. Na computação de intervalos seguindo a definição de RDM-IA, as operações básicas foram implementadas tal qual os conceitos abordados na literatura. Porém, estas somente não oferecem o completo funcionamento e aplicabilidade da biblioteca no desenvolvimento de soluções. Em vista disso, operações unárias e complexas foram adicionadas ao desenvolvimento de PyRDMIA, conforme podem ser vistas na Tabela 1.

Tabela 1. Operações em PyRDMIA

Operação	Descrição
rdmia.number()	Criação de um intervalo RDM
+, -, *, /	Operações básicas padrão
**	Potência
sqrt	Raiz quadrada
abs	Valor absoluto
exp	Exponencial
sin, cos, tan, etc	Operações trigonométricas
~, Not, and, or	Operações lógicas
≤, ≥, ‹, ›, =, !=	Operações comparativas

Além destas, também estão implementadas e disponíveis métricas próprias da aritmética intervalar para a estimativa de qualidade do resultado intervalar, sendo: erro absoluto, erro relativo e diâmetro. Estas podem ser acessadas pelas assinaturas, respectivamente: *absoluteError(), relativeError() e diameter().*

4. APLICAÇÃO PRÁTICA

Para demonstrar a operabilidade do pacote intervalar PyRDMIA, serão utilizadas funções que pertencem a uma categoria de problemas de otimização. Otimização global se refere a encontrar um valor extremo de uma dada função não convexa em uma determinada região. Em geral, as técnicas para encontrar a solução global desse tipo de problema enfrenta dificuldades, sendo uma das principais o fato do método ficar preso em mínimos locais (HEDAR; AHMED, 2004).

Três problemas foram escolhidos para a computação: Ackley (AK), Dixonprice (DP) e Ellipse (EL); Equações (6), (7) e (8), respectivamente.

$$AK_n(x)=20+e-20e^{-1/5}\sqrt{1/n\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-e^{-1/n\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cos(2\pi x_i)} \tag{6}$$

$$DP_n(x)=(x_1-1)^2+\sum_{i=2}^{n}i\left(2x_i^2-x_{i-1}\right)^2 \tag{7}$$

$$EL(x)=7x_1^2-6\sqrt{3}x_1x_2+13x_2^2 \tag{8}$$

Para a computação das funções, utilizou-se uma configuração de parâmetros de 2 e 4 dimensões, 250 iterações e precisão de α=0.5. As soluções serão comparadas a resultados reais e intervalares utilizando IntPy, que implementa SIA. Os resultados são apresentados na Tabela 2, sendo que representam o valor resíduo da operação: ε = x – [x].

Tabela 2. Resultados para problemas de otimização global.

Problema	Sol. Real	Sol Int. IntPy	Sol. Int. PyRDMIA
AK	$4{,}4408^{-16}$	$1{,}776^{-15}$	0.0
DP	0.1881	-	0.0
EL	0.0	0.0	0.0

Como pode ser visto, a computação utilizando o pacote intervalar PyRDMIA chegou aos mínimos globais das funções, com valores muito próximos aos estimados em aritmética real, dado que o valor representa a diferença entre o valor real e o intervalo solução retornado. Percebe-se ainda que para o segundo problema, a biblioteca que implementa SIA se demonstrou incapaz de chegar a uma solução. Estes breves resultados servem para demonstrar a capacidade de operação da biblioteca desenvolvida.

5. CONCLUSÕES

O desenvolvimento de PyRDMIA é justificado pala necessidade de uma biblioteca que permita o desenvolvimento de soluções para problemas mais complexos, onde a aritmética intervalar pode ser aplicada utilizando linguagem de programação. Os resultados apresentados nesse trabalho serviram para demonstrar a operabilidade e consistência de resultados retornados pelo pacote intervalar desenvolvido.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FERSON, S.; GINZBURG, L.; KREINOVICH, V.; SCHULTE, H. Interval computations as a particular case of a general scheme involving classes of probability distributions. Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods. **Springer**, Boston, MA, 2001.

HEDAR, Abdel-rahman; AHMED, A. Studies on metaheuristics for continuous global optimization problems. 2004.

LANDOWSKI, Marek. Usage of RDM Interval Arithmetic for Solving Cubic Interval Equation. In: **Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017**. Springer, Cham, 2017. p. 382-391.

MOORE, R. E. Interval analysis. **Prentice-Hall**, Englewood Cliffs. V4. 1966.

PIEGAT, Andrzej; LANDOWSKI, Marek. Is the conventional interval-arithmetic correct?. **Journal of Theoretical and Applied Computer Science**, v. 6, n. 2, p. 27-44, 2012.

PIEGAT, Andrzej; LANDOWSKI, Marek. Two interpretations of multidimensional RDM interval arithmetic: Multiplication and division. **International Journal of Fuzzy Systems**, v. 15, n. 4, p. 486-496, 2013.