

# MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE UMA BACIA HIDROGRÁFICA

THAYNA NUNES ALVES<sup>1</sup>  
LAUREN FARIAS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – [thaynunesalves@hotmail.com](mailto:thaynunesalves@hotmail.com)

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas – [lauren.if@gmail.com](mailto:lauren.if@gmail.com)

## 1. INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são formulações matemáticas que modelam fenômenos físicos através de leis fundamentais, como: a segunda Lei de Newton, Lei de Lavoisier, Lei de Kirchhoff e etc. Não existe apenas um método geral que resolva todo tipo de equação, e sim algumas fórmulas exatas para soluções de certos tipos. Devido a complexidade da maioria dos problemas reais, os métodos numéricos são uma alternativa para obter soluções aproximadas destes sistemas, através da modelagem numérica.

O objetivo da modelagem matemática, é encontrar a taxa de variação com o tempo das grandezas que caracterizam o problema, ou seja, a dinâmica temporal do sistema de interesse (THOMAS, 2013). Desta forma, ao resolver a equação diferencial que caracteriza determinado processo, podem-se extrair informações relevantes que possibilitam observar e prever seu comportamento. Por outro lado, a modelagem numérica de um sistema de equações diferenciais apresenta uma descrição aproximada e simplificada do processo real. Mas antes de utilizá-la, é necessário aprender como se formula o modelo matemático e como interpretar os resultados – papel designado aos profissionais da área estudada.

Portanto, diversas áreas usam as equações diferenciais até certo ponto. Seu entendimento é essencial para entender quase tudo. Podendo ser estudado diversos fenômenos envolvendo variações, como: posição de um objeto, densidade de bactérias e o escoamento de uma bacia. Neste trabalho, as modelagens numéricas serão aplicadas no último objeto de estudo citado, especificamente em uma bacia hidrográfica, a fim de demonstrar como as mesmas facilitam os cálculos complexos no cotidiano dos profissionais que trabalham com situações representadas por equações diferenciais, e posteriormente compará-las com a aplicação da modelagem matemática.

O problema proposto consiste em certificar-se da possível existência de aquíferos na região da Bacia do Ribeirão Lobo, localizada no estado de São Paulo. Com base nos dados coletados por um geólogo, constatou-se que inicialmente ( $t=0s$ ), a altura do nível d'água era de 190 m. A partir do desenvolvimento do Problema de valor inicial (PVI) e baseado nas características da região, o objetivo do profissional é interpretar geologicamente o comportamento desta bacia hidrográfica em um mês de escoamento.

## 2. METODOLOGIA

O processo metodológico foi decomposto em duas partes. A primeira etapa está associada a modelagem matemática do problema proposto, com o objetivo

de definir a equação diferencial e somado a etapa de revisão bibliográfica, compreender os processos geológicos, hidrológicos, ecológicos e climáticos que constituem a Bacia do Ribeirão Lobo. A soma destes processos permitiu uma atribuição adequada ao problema de valor inicial (PVI). Além disso, esta etapa auxiliou no abastecimento de dados necessários para completar a equação utilizada.

A segunda etapa consistiu no uso do *software* Visual Cálculo Numérico (VCN). Sua utilização foi necessária para desenvolver os cálculos de ajuste polinomial e na aplicação do método de Runge Kutta 4ª ordem, ou seja, as modelagens numéricas. A execução do programa concedeu também, a possível precisão obtida no resultado final, de forma a observar os ajustes de curvas simulados em gráficos. Por último, a calculadora implementada no sistema possibilitou a construção de uma tabela, onde é possível comparar o valor real do aproximado, para diferentes iterações.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir do desenvolvimento de modelos matemáticos sobre os escoamentos de fluidos, a equação diferencial que representa uma bacia hidrográfica irregular, considerando todos os acidentes topográficos, é dada pela seguinte expressão:

$$S(y)dy = \frac{k \cdot a(t) \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{y_0} dt \quad (1)$$

Onde:

$S(y)$ : Área da secção superficial da bacia;

$a(t)$ : área do escoamento em função do tempo (segundos);

$k$ : constante de proporcionalidade;

$g$ : aceleração gravitacional terrestre;

$y_0$ : altura referencial.

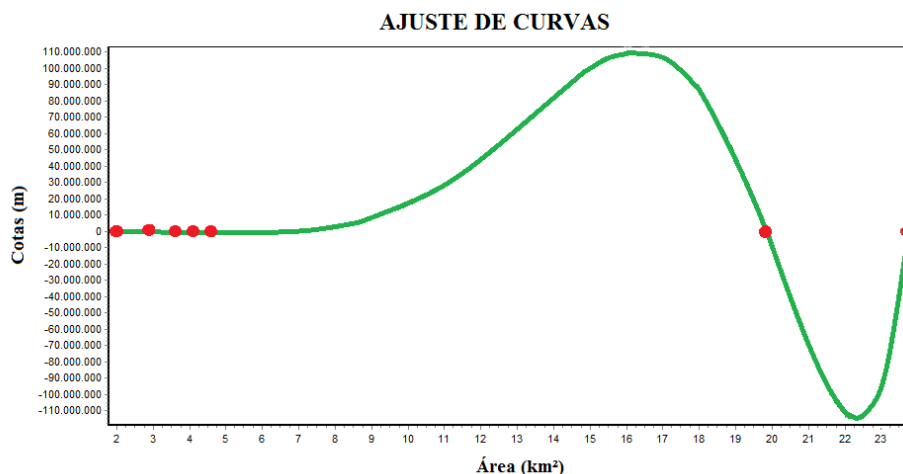
A equação 1, é diferencial de 1ª ordem que contém duas variáveis. Entretanto, o  $a(t)$  foi considerado como constante. Isto porque, o local interno da bacia por onde o fluido escoar é dificilmente deformado, uma vez as feições presentes são representadas por sedimentos e rochas, e geologicamente demoram muito tempo para sofrerem alterações. Desta forma, uma mudança notável seria apenas constatada se houvesse uma rápida modificação geomorfológica por forças naturais, ou caso o sistema fluvial sofresse alteração em sua direção. É importante ressaltar que a área de escoamento foi considerada com formato circular para os cálculos.

Em seguida, foi necessário encontrar os valores da constante de proporcionalidade e da altura referencial. No caso da constante, atribui-se um valor de maneira a avaliar as seguintes questões: aporte sedimentar, topografia do terreno e fatores climáticos. Além disso, usou-se como referência valores de constantes já existentes à algumas bacias. Em relação a altura referencial, seu valor é determinado pela diferença da maior e menor cota pertencente à bacia.

Por último, ao determinar a função representativa da  $S(y)$ , foi necessário realizar um ajuste polinomial. Trata-se de um método numérico que consiste em

encontrar uma curva ajustável a uma série de pontos e que possivelmente cumpra uma série de parâmetros adicionais. Os dados utilizados para tal ajuste são provenientes da Bacia do Ribeirão Lobo e concedidos pelo autor PALARETTI (2011), onde a área da seção superficial foi relacionada com sua cota correspondente.

Figura 1: Apresentação visual do ajuste de curvas.



Fonte: Autoral, 2018.

Na Figura 1 é possível visualizar um ajuste perfeito, uma vez que optou-se por uma função polinomial de oitavo grau para representar a complexidade geométrica de uma bacia. Este fenômeno garante uma precisão maior nos resultados.

Ao preencher todos os dados da equação inicial, aplicou-se o método do fator integrante na mesma, e assim obteve-se a solução real do problema inicialmente proposto pelo geólogo. Posteriormente, foi aplicado o método de Runge Kutta no *software*, conhecido como um procedimento iterativo para a resolução numérica de soluções de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, e sua aplicação permitiu encontrar a solução aproximada para o mesmo problema.

Tabela 2: Resultado de distintas iterações.

Período (s)	Valor real (m)	Valor aproximado (m)
Um dia (86.400)	189,999999999999774	189,999999999999776
Uma semana (604.800)	189,999999999998431	189,999999999998433
<b>Um mês (2.419.200)</b>	<b>189,999999999993731</b>	<b>189,999999999993733</b>

Fonte: Autoral, 2018.

O resultado final (= 189,99) afirma que trata-se de uma bacia estável, uma vez que não observou-se inundação ou mesmo estiagem no período de tempo estipulado.

Portanto, o geólogo considerou continuar com a pesquisa a partir das análises feitas. Primeiramente, porque foram constatados a predominância de sedimentos arenosos no local, e os mesmos permitem uma boa infiltração e percolação. E segundo, porque um excesso de pluviosidade não permite ocorrer inundações no local, uma vez que identificou-se um eficiente escoamento subsuperficial na região, no qual pode alimentar um possível reservatório. Sendo assim, os fatores estudados não descartam a existência de aquíferos na região da Bacia do Ribeirão Lobo.

#### 4. CONCLUSÕES

Ao comparar os resultados das soluções aproximadas (modelagem numérica) e exatas (solução analítica do modelo matemático), observa-se quase uma exatidão entre os mesmos. Pois o método iterativo escolhido, é conhecido por sua eficiência e precisão.

Desta maneira, a modelagem numérica facilita a rotina de trabalho de diversos profissionais quando bem aplicada, uma vez que auxilia no cálculo de cenários complexos. Sua aplicação é rápida, pois a maioria dos métodos numéricos encontram-se disponíveis em programas computacionais, e sua execução é efetiva.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATTISTI, Aloísio José. **Equações Diferenciais Aplicadas em Escoamento de Fluidos**. UFSC. Florianópolis, 2012. Acessado em 21 jul 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96626/Aloisio%20Jos%C3%A9.pdf>

PALARETTI, Luiz Fabiano. **Notas de Aula – Manejo de Bacias Hidrográficas**. FCAV/UNESP. Jaboticabal, 2011. Acessado em 21 jul 2018. Disponível em: <http://www.fcav.unesp.br/Home/departamentos/engenhariarural/luizfabianopalaretti/bacia-hidrografica.pdf>

ROSA, Ricardo M. S. Rosa. **Aquíferos**. IM - UFRJ. Rio de Janeiro, agosto de 2008. Acessado em 21 jul 2018. Disponível em: <http://flseagrants.ifas.ufl.edu/CriseNasAguas/Chapter8.pdf>

ROSA, Ricardo M. S. Rosa. **Apostila - Equações Diferenciais**. IM - UFRJ. Rio de Janeiro, agosto de 2009. Acessado em 21 jul 2018. Disponível em: <http://www.labma.ufrj.br/~rrosa/dvifiles/apostila-ed-agosto2009>

THOMAS, Lucas Rangel Thomas. **O Uso de Equações Diferenciais na Modelagem de Sistemas Naturais e Outros**. UNB. Distrito Federal, fevereiro de 2013. Acessado em 21 jul 2018. Disponível em: [http://bdm.unb.br/bitstream/10483/4686/1/2013\\_LucasRangelThomas.pdf](http://bdm.unb.br/bitstream/10483/4686/1/2013_LucasRangelThomas.pdf)