Componentes da Equação de Friedmann e suas Influências

VINÍCIUS SIMÕES ADERALDO[1];
VICTOR PAULO GONÇALVES[2]

[1]Universidade Federal de Pelotas – vini.aderaldo@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – barros@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A Física, como um todo, é composta por diversas áreas de estudo, buscando respostas – e encontrando, nesse caminho, muitas outras perguntas – acerca da composição mais elementar de tudo o que permeia o Universo, até o estudo do próprio Universo. Assim, podemos dizer que, a área encarregada do estudo do Universo, no que diz respeito ao seu comportamento (como se dá a sua evolução), a sua composição e de como é estruturado (como é a distribuição da composição do Universo), é chamada de Cosmologia (ROSENFELD, 2005). As equações básicas que regem a Cosmologia são as equações de Einstein da sua Relatividade Geral. Quando consideramos que o Universo é homogêneo (a composição do Universo é distribuida uniformemente) e isotrópico (as propriedades física são as mesmas para quelquer que seja a direção tomada), tais equações recaem nas equações de Friedmann que, por sua vez são o foco o presente trabalho.

É de conhecimento nosso o fato de o Universo estar em expansão, graças a estudos efetuados, inicialmente, pelo astrônomo Edwin Powell Hubble (WAGA, 2000). Mas qual é a natureza dessa expansão? Ela é constante ou varia em função do tempo? Essa pergunta é razoável, já que, por ser composto por matéria, o Universo é regido pela Lei da Gravitação, ou seja, devido à gravidade, a expansão deveria ser retardada. Mas essa gravidade seria suficiente para reverter a expansão? Para respondermos isso utilizamos a equação de Friedmann na forma (RYDEN, 2002)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \frac{1}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{1-\Omega_0}{a^2} \qquad (1)$$

onde H_0 é a cosntante de Hubble, Ω_0 é o parâmetro de densidade e a é o fator de escala do Universo que mede a taxa de expansão do Universo (RYDEN, 2002), tal que podemos extrair três possibilidades para o caso da equação (1), que diz respeito a um Universo coposto apenas por matéria e que possui uma certa curvatura dada pelo termo de curvatura k *onde* $k \propto \Omega_0 - 1$. Essas possibilidades são:

Parâmetro de Densidade	Termo de Curvatura	Destino Final
$\Omega_0 < 1$	$k = -1$	Big Chill ($a \propto t$)
$\Omega_0 = 1$	$k = 0$	Big Chill ($a \propto t^{2/3}$)
$\Omega_0 > 1$	$k = +1$	Big Crunch

Tabela 1 – Relação entre o Parâmetro de Densidade, o Termo de Curvatura e o Destino Final de um Universo contendo apenas matéria e curvatura (RYDEN, 2002).

Para cada caso exposto na Tabela 1 observamos um comportamento diferente para o fator de escala como exposto na Figura 1.

Neste trabalho, iremos solucionar a Equação de Friedmann adcionando novos termos além da matéria bariônica já considerada no início de nossos estudos, à saber, iremos considerar matéria + constante cosmológica (Λ) e matéria + radiação. Dessa forma, será possível determinar o comportamento do fator de escala em função do tempo para cada caso.

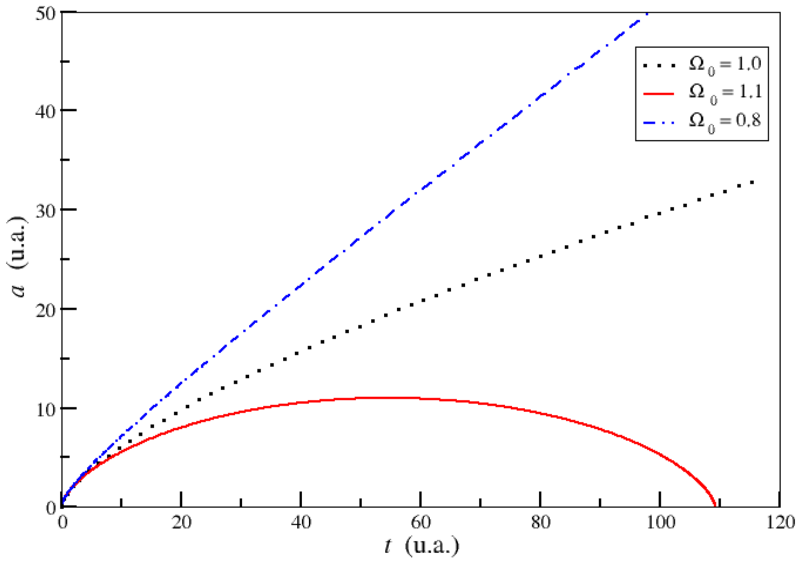

Figura 1 - Fator de escala em função do tempo para um Universo plano (curva pontilhada), Universo negativamente curvado (curva tracejada) e para um Universo positivamente curvado (curva contínua).

2. METODOLOGIA

Para a obtenção dos conhecimentos adquiridos estudamos referências básicas associadas ao projeto em questão e executamos os cálculos presentes nestas, com foco na dedução analítica e numérica da equação de Friedmann. Além disso, obtivemos a solução desta equação considerando diferentes componentes presentes no Universo (matéria, radiação e constante cosmológica) com o intuito de vizualizar as implicações das possíveis combinações de tais componetes no que diz respeito ao fator de escala do Universo.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Efetuados, inicialmente, estudos acerca do comportamento do Universo predito pela Equação de Friedmann considerando curvatura e a existência de apenas uma componente (matéria). Posteriormente, estudamos a solução da referida equação adicionando outras componentes e considerando o Universo como sendo plano ($k = 0$).

<u>Matéria + Constante Cosmológica</u>

Nesta etapa consideramos as componentes de matéria e constante cosmológica (além de $k = 0$), tal que, manipulando a eq. (1) e adicionando os termos desejados, foi possível obter o fator de escala em função do tempo. Os resultados obtidos, numericamente, são apresentados na Figura 2. Para tanto, utilizamos $\Omega_{\Lambda,0} > 0$, motivados por resultados experimentais recentes. Para um Universo

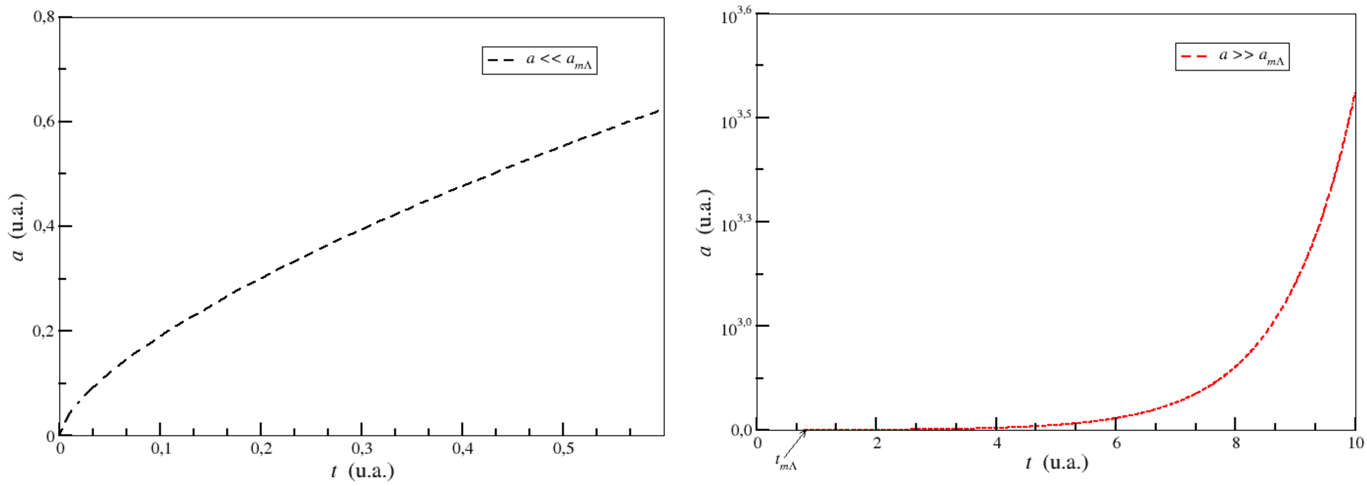

Figura 2 – Fator de escala em função do tempo para t pequeno (esquerda) e t grande (direita).

que contém apenas matéria e radiação, a idade desse é de aproximadamente *13,5.10*^{9} anos. Não obstante, obtivemos que, o intervalo de tempo necessário para que, constante cosmológica e matéria coexistam com a mesma densidade ($t_{m\Lambda}$), é de aproximadamente *9,8.10*^{9} *anos.* Dessa forma, foi possível notar que a contribuição da constante cosmológica é dominante por cerca de *3,7.10*^{9} anos (RYDEN, 2002). Analíticamente, obtivemos, para *t* pequeno, a solução

$$a(t) \approx \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{\Omega_{m,0}}H_0 t\right)^{2/3} \qquad (2)$$

que corresponde ao gráfico da esquerda e para *t* grande (gráfico da direita), obtivemos

$$a(t) \approx a_{m\Lambda}\exp[\sqrt{1-\Omega_{m,0}}H_0 t]. \qquad (3)$$

<u>Matéria + Radiação</u>

Consideremos agora que as componentes presentes sejam matéria e radiação, considerando novamente um Universo Plano. Efetuamos o mesmo tipo de manipulação da eq. (1) que no caso anterior, diferindo apenas nas componentes adicionadas. Dessa maneira, obtivemos a relação entre o fator de escala e o tempo, numericamente, de forma a obter os gráficos apresentados na Figura 3.

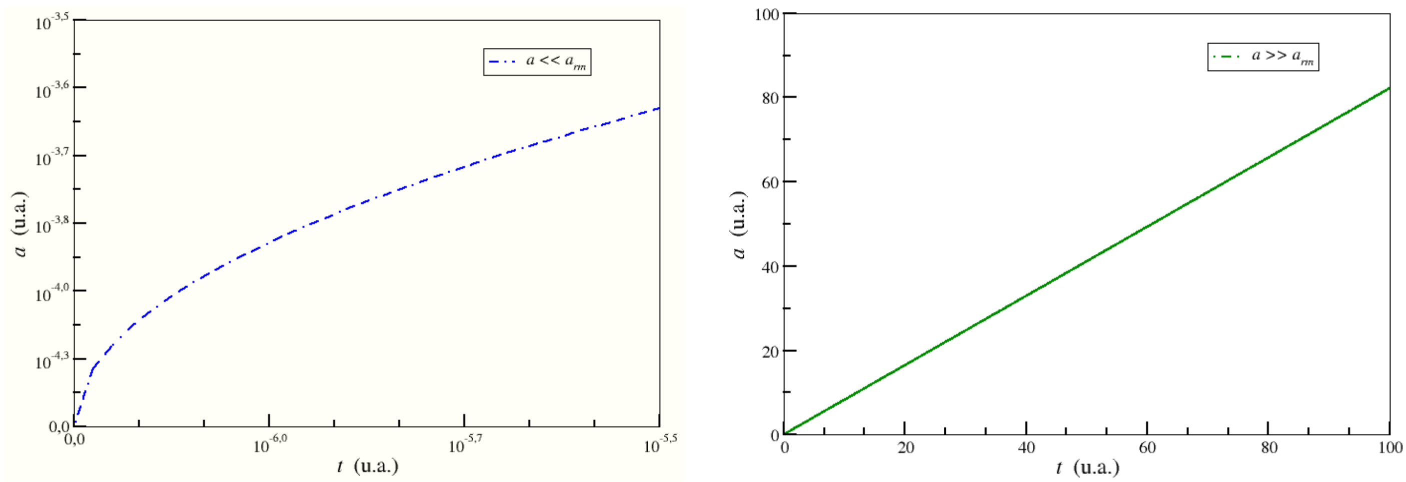

Figura 3 – Fator de escala em função do tempo para t pequeno (esquerda) e t grande (direita).

Analisando analíticamente a Equação de Friedmann para um Universo contendo apenas matéria e radiação, foi possível verificar que, o intervalo de tempo necessário para que haja a igualdade entre densidade de matéria e densidade de radiação (t_{rm}) é de aproximadamente *4,7.10⁴* anos. Foi possível, também, a solução analítica, de forma que, para *t* pequeno (gráfico à esquerda), obtivemos

$$a(t) \approx (2\sqrt{\Omega_{r,0}}H_0 t)^{1/2} \qquad (4)$$

e para *t* grande (gráfico à direita), obtivemos a solução analítica

$$a(t) \approx \left(\tfrac{3}{2}\sqrt{\Omega_{m,0}}H_0 t\right)^{2/3}. \quad (5)$$

4. CONCLUSÕES

Nossos resultados indicam que, ao adicionarmos o termo referente à radiação juntamente com o termo referente à matéria, o tempo em que a radiação tem dominância (~*$4{,}7.10^4$ anos*) é pequeno se comparado à idade do Universo (~*$13{,}5.10^9$*), calculado na na etapa matéria + constante cosmológica, ou seja, podemos desconsiderar o termo referente à radiação para efetuar o cálculo da idade do Universo. Além disso, obtendo as soluções analíticas nas duas etapas, verificou-se que, no caso matéria + constante cosmológica, para *t* pequeno obtivemos uma solução com dependência $a \propto t^{2/3}$, (RYDEN, 2002) a mesma exigida para o caso de um Universo plano contendo apenas matéria bariônica. Para *t* grande, obtivemos uma dependência do tipo $a \propto e^{kt}$, a mesma exigida para um Universo plano contendo apenas o termo referente à constante cosmológica. Feito isso, o próximo passo será considerar as três componentes (matéria, constante cosmológica e radiação) e buscar as implicações na evolução temporal do Universo.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

WAGA, I. . A expansão do Universo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Rio de Janeiro, v. 22, n. 2, p. 163 - 175, 2000.
ROSENFELD, R. . A Cosmologia. **Física na Escola**, v. 6, n. 1, p. 31 – 37, 2005.
RYDEN, B. . **Introduction to Cosmology**, Addison Wesley, 2002.