



## APLICAÇÃO DE UM REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO PARA CONTROLE DE POSIÇÃO LINEAR E ANGULAR DE UM PÊNDULO INVERTIDO

RÔMULO THIAGO SILVA DA ROSA<sup>1</sup>; PAULO JEFFERSON DIAS DE OLIVEIRA EVALD<sup>2</sup>; JUSOAN LANG MÓR<sup>2</sup>; ANDREYNA SÁRILA RAMOS FERREIRA<sup>2</sup>; FERNANDO DA FONSECA SCHNEIDER<sup>2</sup>; SILVIA SILVA DA COSTA BOTELHO<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Rio Grande – romulothiago@gmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal do Rio Grande –  
(paulo.evald,jusoan66,areynasrf,fernando.f.schneider@gmail.com

<sup>3</sup>Universidade Federal do Rio Grande – siviacb.botelho@gmail.com

### 1. INTRODUÇÃO

O problema do pêndulo invertido é um exemplo clássico de sistema instável. A situação de manter um pêndulo invertido em equilíbrio recorre à situações reais de alta complexidade, tais como: o equilíbrio de estruturas móveis, como edifícios de bass adaptáveis para evitar desmoronamento em caso de abalos sísmicos e terremotos, o equilíbrio de um veículo de duas rodas ou ainda quando considerado um pêndulo invertido duplo, pode representar as dinâmicas de equilíbrio de uma perna de um ser bípede.

Dada a importância desse sistema para o estudo de controladores de sistemas naturalmente instáveis e caóticos, o presente trabalho propõem um regulador quadrático linear para o controle do equilíbrio vertical da haste do pêndulo invertido. Para avaliar o desempenho do controlador proposto, resultados de simulação são apresentados e discutidos.

### 2. METODOLOGIA

O regulador quadrático linear (LQR - *Linear quadratic Regulator*), é um método de controle que tem como objetivo regular o sistema com o mínimo de gasto de energia possível (ANDERSON; MOORE, 1971). O LQR é desenvolvido baseado na concepção de um sistema linear, observável, controlável e de horizonte finito (o tempo final do sistema tende a infinito), conforme mostrado em (1), no espaço de estados,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1)$$

tendo a condição de contorno  $x(t_0) = x_0$   $x(t_0) = x_0$ , com  $x = [x_0 \ x_1 \ x_2 \dots \ x_N]$   $u = [u_0 \ u_1 \ u_2 \dots \ u_M]$ ,  $A_{N \times N}$ ,  $B_{N \times 1}$ ,  $C_{M \times N}$  e  $D_{1 \times M}$ , sendo  $N$  e  $M$  a ordem do sistema e da entrada de controle, respectivamente. Existe um vetor  $k = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_N]$  que quando retroalimentado ao sistema tornará o sistema estável e ótimo.

O problema de controle ótimo lida com a solução de um sistema de equações diferenciais a fim de encontrar uma lei de controle dita ótima (OGATA, 1995). O princípio de otimalidade de uma lei de controle se baseia na minimização da função de custo do sistema a ser controlado. Para o sistema descrito por (1), existe uma equação de custo quadrático definida por:



$$J = \frac{1}{2} x^T(tf) S f(tf) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (2)$$

sendo  $Q$ , uma matriz definida semi-positiva, e  $R$ , uma matriz definida positiva, que representam as matrizes de ponderação para os estados e a entrada, respectivamente. Além disso,  $Sf$  é uma matriz de ponderação para o estado terminal, definida semi-positiva. Ainda,  $t_0$  é o tempo inicial e  $t_f$  é o tempo final do sistema.

Aplicando o princípio máximo (o máximo de um parâmetro em um domínio é encontrado no contorno deste domínio) em (2) obtém-se:

$$H = -\frac{1}{2} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] + \lambda^T(t) [Ax(t) + Bu(t)] \quad (3)$$

Consistindo então na equação Hamiltoniana, sendo  $\lambda$  o co-estado do sistema. Derivando (3) em função de  $x(t)$ ,  $\lambda(t)$  e  $u(t)$  obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T = Ax + Bu \\ -\dot{\lambda} &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T = Qx + A^T \lambda \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ Ru + \lambda^T B &= 0 \\ u &= -R^{-1} B^T \lambda \end{aligned} \quad (4)$$

Supondo que  $\lambda$  é linearmente proporcional a  $x$ , existe uma matriz  $P$ , definida positiva, que relaciona  $\lambda(t) = P(t)x(t)$  os dois itens como . Derivando-a em função de  $t$  e utilizando o conjunto de equações mostrado em (4) equaciona-se:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{P}x + P\dot{x} \\ \dot{\lambda} &= \dot{P}x + P(Ax + Bu) \\ \dot{\lambda} &= \dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B^T\lambda) \\ (Qx + A^T Px) &= \dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B^T Px) \\ (\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

consistindo em (5), a equação de Riccati diferencial (RDE - *Riccati differential equation*).

Substituindo a atribuição  $\lambda(t) = P(t)x(t)$  no último termo de (4) tem-se

$$\begin{aligned} u &= -R^{-1} B^T P x \\ u &= -kx \end{aligned} \quad (6)$$

sendo  $k = -R^{-1} B^T P x$  . Analisando-a em horizonte finito,  $B$  e  $u$  são constantes. Portanto,  $P$  em (6) também é constante. Logo, re-escrevendo-a com (5) considerando o  $P$  constante, obtém-se:

$$(PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q)x = 0 \quad (7)$$

resultando na equação de Riccati algébrica (ARE - *Algebraic Riccati equation*).

Então, para dimensionamento de um LQR se faz necessário apenas as equações (6) e (7), assim como o sistema definido em (1) para realizar a sintonização dos ganhos em simulação.

Substituindo o último termo de (6) no sistema apresentado em (1), obtém-se a nova equação de espaço de estados, mostrada em (8).

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - Bk)x \\ y = (C - Dk)x \end{cases} \quad (8)$$

## 2.1 Cálculo das matrizes Q e R

A diferença entre as matrizes  $Q$ , a matriz de pesos de estado, e  $R$ , a matriz de pesos de entrada, determina a velocidade de resposta do sistema: quanto maior  $Q$  em relação a  $R$  maior peso se dará para o estado, tendo uma entrada de controle inferior. Consequentemente, a referência será alcançada de forma mais rápida.

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A fim de comprovação dos conceitos anteriormente apresentados, será realizado a simulação do problema Pêndulo Invertido sobre uma plataforma móvel, conforme modelado em (DORF, 2011).

Portanto, será dimensionado um LQR para o sistema apresentado na Figura 1. Com a característica de que o carro se move livremente no eixo horizontal ( $x$ ) e o sistema tem controle de posição horizontal do carro, bem como do ângulo  $\theta$  do pêndulo.

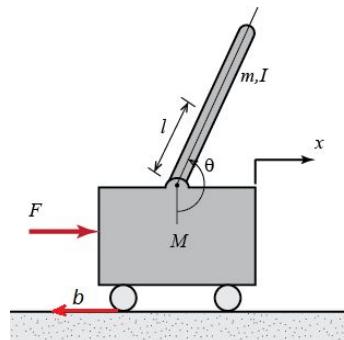


Figura 1: Diagrama do sistema pêndulo invertido sobre base móvel

sendo o parâmetro  $M$  a massa do carro,  $b$  o coeficiente de atrito do carro com o trilho,  $\theta$  o ângulo do pêndulo,  $I$  o centro de massa do pêndulo,  $m$  a massa do pêndulo e  $I$  a inércia do pêndulo.

O sistema é linear e descrito como em (1) com os seguintes variáveis de estado  $x = [x \dot{x} \theta \dot{\theta}]^T$ , sendo as matrizes do sistema apresentadas em (9), com  $x$  representando a posição do carro,  $\dot{x}$  representando a velocidade do carro,  $\theta$  representando a posição angular do pêndulo e  $\dot{\theta}$  representando a velocidade angular do pêndulo.

Foram definidos os parâmetros como:  $M = 0.5\text{Kg}$ ,  $m = 0.2\text{Kg}$ ,  $b = 0.1\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ,  $I = 0.006\text{kg}/\text{m}^2$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  e  $I = 0.3\text{m}$ . Foi utilizado  $Q1 = \text{diag}(1,0,1,0)$ ;  $Q2 = \text{diag}(5000,0,100,0)$  e  $R1 = 1$ ;  $R2 = 3$ . As matrizes  $Q$  e  $R$

são variadas para apresentar um controle com alto custo ( $Q < R : \{Q1, R2\}$ ) de custo normal ( $Q=R : \{Q1, R1\}$ ) e baixo custo ( $Q > R : \{Q2, R1\}$ ).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(I+ml^2)b}{I(M+m)} + Mml^2 & \frac{(m^2gl^2)}{I(M+m)} + Mml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{(mlb)}{I(M+m)} + Mml^2 & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)} + Mml^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I+ml^2)}{I(M+m)} + Mml^2 \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M+m)} + Mml^2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

As curvas do estado  $x$  utilizando as diferentes matrizes  $Q$  e  $R$  estão apresentadas na Figura 2.

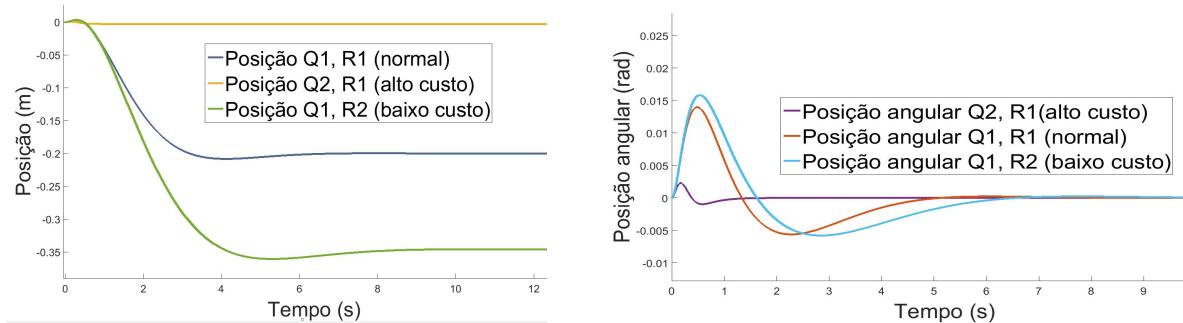


Figura 2: Curvas de posição linear (esquerda) e angular (direita)

#### 4. CONCLUSÕES

Foi mostrado que o regulador quadrático linear apresenta um método de controle ótimo que visa diminuir o gasto de energia do sistema controlado. Além disso, o LQR apresenta um ganho estático, visto que a matriz de ganhos  $k$  não aumenta a ordem do sistema em retroação. Ainda, como o controlador tem baixa complexidade, permite ao projetista a liberdade de ponderar as matrizes  $Q$  e  $R$  de forma intuitiva e rápida. O próximo passo é construir um protótipo e validar experimentalmente o método proposto neste trabalho.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON B. D.; MOORE, J. B., **Linear optimal control**. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1971, vol. 197, no. 1.

DORF, R.C., BISHOP, R.H. **Modern control systems**. Pearson, 2011.

OGATA K. **Discrete-time control systems**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.