

COMPRIMENTO E CURVATURA DAS CURVAS HIPOTROCÓIDES PARA ALGUNS PARÂMETROS

MUNIQUE DOS SANTOS LIMA¹; LISANDRA DE OLIVEIRA SAUER²

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - Campus Caxias do Sul - munique.lima@caxias.ifrs.edu.br

² Universidade Federal de Pelotas – lisandra.sauer@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em calcular o comprimento e a curvatura das curvas hipotrocóides para alguns parâmetros, tais curvas são obtidas através do espirógrafo. Para tal, fazemos o uso das equações paramétricas dessas curvas. A parametrização de uma curva segundo CORRÊA, consiste em descrever o seu trajeto em função de um intervalo de tempo, ou seja, precisamos determinar as coordenadas de um ponto da curva em função de um parâmetro.

O espirógrafo (Figura 1) consiste em uma régua, na qual um círculo dentado roda sem deslizar dentro de uma circunferência fixa de raio maior, o círculo que se move possui vários furos, desse modo, ao colocar a ponta de uma caneta em um desses furos e girar, desenham-se diversas curvas, estas são chamadas hipotrocóides.

Desse modo, vamos apresentar alguns tópicos importantes conforme ALENCAR (2003) e calcular o comprimento e a curvatura das curvas hipotrocóides para alguns parâmetros.



Figura 1: O espirógrafo

2. METODOLOGIA

O desenvolvimento do presente trabalho se deu através do estudo do capítulo “Curvas Planas” do livro “Geometria Diferencial das Curvas Planas” [A] e demais referências, contando com trocas de e-mail com a professora orientadora. Além disso, utilizamos resultados do trabalho “Parametrizações das curvas obtidas através do Espirógrafo”, que foi apresentado no XXV Congresso de Iniciação Científica da Universidade Federal de Pelotas, em 2016.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A hipotrocóide é a trajetória de um ponto fixo de uma circunferência de raio r , que roda sem deslizar tangencialmente dentro de outra circunferência de raio R , de modo que tal ponto fixo está a uma distância a do centro da circunferência de raio r .

Primeiramente, vamos definir curva regular, mas para isso precisamos definir seu vetor tangente. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

O vetor tangente (ou vetor velocidade) de α em $t_0 \in I$ é dado por $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. A velocidade escalar de α em $t_0 \in I$ é dada pelo módulo do vetor velocidade $\alpha'(t_0)$, isto é, $\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$. Quando $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, tal vetor aponta na direção tangente à curva α em t_0 .

Definição 1 [A, Página 28]: Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t_0 \in I$, se $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, ou equivalentemente, se $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$. A curva α é regular em I , se α for regular para todo $t \in I$.

Temos que as equações paramétricas que definem as curvas hipotrocóides são $G(\beta) = (x(\beta), y(\beta))$, ou seja,

$$x(\beta) = (R - r) \cdot \cos(\beta) + a \cdot \cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right)$$

e

$$y(\beta) = (R - r) \cdot \sin(\beta) - a \cdot \sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right).$$

Calculando $G'(\beta)$, temos,

$$x'(\beta) = -\sin(\beta) \cdot (R - r) - a \cdot \sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right) \cdot \left(\frac{R}{r} - 1\right)$$

e

$$y'(\beta) = \cos(\beta) \cdot (R - r) - a \cdot \cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right) \cdot \left(\frac{R}{r} - 1\right).$$

Desse modo, vamos fixar alguns valores para R , r e a e calcular o comprimento de arco da curva $G(\beta)$, dado pela função $L_G : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L_G(\beta) = \int_{t_0}^t \|G'(\beta)\| d\beta = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\beta))^2 + (y'(\beta))^2} d\beta, \quad t_0 \in I.$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. Para $R = 5$, $r = 2$ e $a = 3$, onde $0 \leq \beta \leq 4\pi$, temos,
 $G'(\beta) = \left(-3 \cdot \sin(\beta) - \frac{9}{2} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\beta\right), 3 \cdot \cos(\beta) - \frac{9}{2} \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\beta\right)\right)$. Logo,

$$\begin{aligned} L_G(\beta) &= \int_0^{4\pi} \sqrt{\left[-3 \cdot \sin(\beta) - \frac{9}{2} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\beta\right)\right]^2 + \left[3 \cdot \cos(\beta) - \frac{9}{2} \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\beta\right)\right]^2} d\beta \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{117}{4} - 27 \cdot \cos\left(\frac{5}{2}\beta\right)} d\beta \approx 63,03 \text{ u.c.} \end{aligned}$$

Essa integral não possui solução analítica. Portanto, o comprimento de arco desta curva é aproximadamente 63,03 u.c.

Exemplo 2. Para $R = 10$, $r = 7$ e $a = 5$, onde $0 \leq \beta \leq 14\pi$, temos,
 $G'(\beta) = \left(-3 \cdot \sin(\beta) - \frac{15}{7} \cdot \sin\left(\frac{3}{7}\beta\right), 3 \cdot \cos(\beta) - \frac{15}{7} \cdot \cos\left(\frac{3}{7}\beta\right)\right)$. Logo,

$$\begin{aligned}
 L_G(\beta) &= \int_0^{14\pi} \sqrt{\left[-3 \cdot \sin(\beta) - \frac{15}{7} \cdot \sin\left(\frac{3}{7}\beta\right)\right]^2 + \left[3 \cdot \cos(\beta) - \frac{15}{7} \cdot \cos\left(\frac{3}{7}\beta\right)\right]^2} d\beta \\
 &= \int_0^{14\pi} \sqrt{\frac{666}{49} - \frac{90}{7} \cdot \cos\left(\frac{10}{7}\beta\right)} d\beta \approx 149,4 \text{ u.c.}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, essa integral não possui solução analítica. Portanto, o comprimento de arco desta curva é aproximadamente 149,4 u.c.

Agora, vamos definir a curvatura de uma curva regular. Geometricamente, a função curvatura é uma medida da variação da direção do vetor tangente e, portanto, da variação da mudança de direção da reta tangente a α em $\alpha(t)$. Então, a curvatura é uma medida de quanto uma curva deixa de ser uma reta.

Proposição 1 [A, Página 42]: Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então a curvatura de α em $t \in I$ é dada pela expressão

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}. \quad (1)$$

Calculando $x''(\beta)$ e $y''(\beta)$ da curva $G(\beta)$ vamos obter

$$x''(\beta) = -(R - r) \cdot \cos(\beta) - a \cdot \cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right) \cdot \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2$$

e

$$y''(\beta) = -(R - r) \cdot \sin(\beta) + a \cdot \sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right) \cdot \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2.$$

Agora, vamos calcular a curvatura para os exemplos acima:

Exemplo 3. Como $R = 5$, $r = 2$ e $a = 3$, e $0 \leq \beta \leq 4\pi$, temos,

$$x''(\beta) = -3 \cos(\beta) - \frac{27}{4} \cos\left(\frac{3}{2}\beta\right) \text{ e } y''(\beta) = -3 \sin(\beta) + \frac{27}{4} \sin\left(\frac{3}{2}\beta\right).$$

Substituindo $x'(\beta)$, $x''(\beta)$, $y'(\beta)$ e $y''(\beta)$ em (1) e desenvolvendo os cálculos obtemos:

$$k(\beta) = \frac{\frac{-171}{8} + \frac{27}{4} \cos\left(\frac{5}{2}\beta\right)}{\sqrt{\left(\frac{117}{4} - 27 \cos\left(\frac{5}{2}\beta\right)\right)^3}}.$$

Assim, podemos substituir valores para β dentro do intervalo que a função está definida, neste caso $0 \leq \beta \leq 4\pi$. Se $\beta = \pi$, temos que a curvatura neste ponto é $\frac{-19\sqrt{13}}{507}$ ou aproximadamente $-0,13512$.

Exemplo 4. Como $R = 10$, $r = 7$ e $a = 5$, e $0 \leq \beta \leq 14\pi$, temos,

$$x''(\beta) = -3 \cos(\beta) - \frac{45}{49} \cos\left(\frac{3}{7}\beta\right) \text{ e } y''(\beta) = -3 \sin(\beta) + \frac{45}{49} \sin\left(\frac{3}{7}\beta\right).$$

Substituindo $x'(\beta)$, $x''(\beta)$, $y'(\beta)$ e $y''(\beta)$ em (1) e desenvolvendo os cálculos obte-

mos:

$$k(\beta) = \frac{\frac{2412}{343} - \frac{1260}{343} \cos\left(\frac{10}{7}\beta\right)}{\sqrt{\left(\frac{666}{49} - \frac{90}{7} \cos\left(\frac{10}{7}\beta\right)\right)^3}}.$$

Se $\beta = \pi$, temos que a curvatura neste ponto é aproximadamente 0,11762.

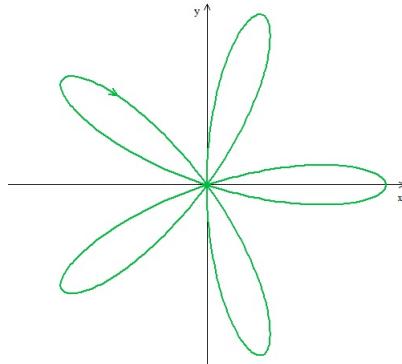


Figura 2: Traço da curva para $R = 5$, $r = 2$ e $a = 3$

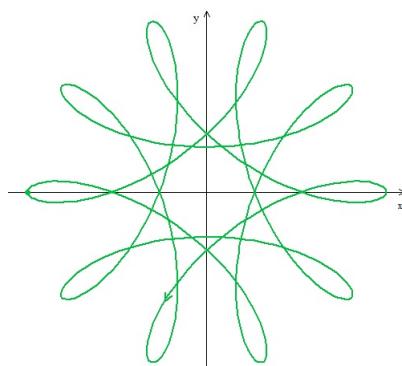


Figura 3: Traço da curva para $R = 10$, $r = 7$ e $a = 5$

4. CONCLUSÕES

Apesar do estudo da curvatura e do comprimento de curvas planas não ser abordado em disciplinas obrigatórias do curso de Licenciatura em Matemática, concluímos que eles são facilmente entendidos através do uso de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [A] ALENCAR, H.; SANTOS, W. **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. 2003.
- [B] ANDRADE, L. N. Um brinquedo chamado espirógrafo. **RPM** 60, 2014.
- [C] CORRÊA, M. L.; VILCHES, M. A. Curvas. In: CORRÊA, M. L.; VILCHES, M. A. **Cálculo: Volume III**. Rio de Janeiro. 2, p. 45 – 92.