SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CINÉTICA ESPACIAL DA TEORIA MULTIGRUPO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS EM GEOMETRIA CARTESIANA POR UM MÉTODO ITERTIVO DE FONTE

MATHEUS G. TAVARES[1]; MARCELO SCHRAMM[2]; RODRIGO ZANETTE[3]
CLAUDIO Z. PETERSEN[4]

[1]Universidade Federal de Pelotas – Matheus.gulartetavares@gmail.com
[2] Universidade Federal de Pelotas – marceloscharamm@hotmail.com
[3]Universaidade Federal do Rio Grande do Sul – rodrigozanette@hotmail.com
[4] Universidade Federal de Pelotas – claudiopetersen@yahoo.com

1. INTRODUÇÃO

A energia nuclear vem ganhando espaço em relação às demais formas de geração de energia elétrica no cenário mundial como alternativa importante aos combustíveis fosseis, visto que sua operação acarreta na baixa emissão de gases poluentes como o CO_2, que é o principal responsável pelo efeito estufa.

No Brasil, temos uma matriz energética predominantemente baseada em energia hidráulica, seja pelo baixo custo relativo da energia gerada, seja por ser uma fonte renovável, ou também pela grande quantidade de rios. Entretanto, o Brasil não pode deixar de investir em outras formas de geração de energía elétrica visando a diversificação da matriz energética, garantindo um sistema elétrico consistente e confiável.

Visando a crescente demanda de energia e a diversificação da matriz elétrica do país a geração termo nuclear se torna uma ótima opção em relação as demais formas de produção de energia. De forma a garantir a produção de energia elétrica através de usinas nucleares de maneira segura, promovem-se estudos no campo da física de reatores nucleares. Neste trabalho resolve-se as equações de cinética espacial da teoria multigrupo de difusão de nêutrons em geometria cartesiana através de um método iterativo de fonte. Essas equações representam a dinâmica temporal da população de nêutrons e estabelecem a distribuição da população de nêutrons em um reator nuclear. O método iterativo de fonte tem sido aplicado com bastante sucesso na solução das equações de transporte em WILLERT et al. (2014), ADAMS; LARSEN (2002) e SCHULZ (2017), ou na solução da equação de difusão em estado estacionário por ZANETTE (2017).

O método consiste em estimar uma distribuição inicial para o termo fonte da equação do fluxo rápido, tornando assim o sistema de equações desacoplado, possibilitando resolver as equações separadamente. Cabe ressaltar que isto ocorre somente em sistemas sem *upscattering*. Para resolução deste sistema utiliza-se a técnica da transformada de Laplace na variável temporal, fazendo com que o conjunto de Equações Diferencias Parciais torne-se um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Essas EDO's são resolvidas a partir de métodos clássicos presentes na literatura. Para retornar as funções ao domínio frequência para o domínio tempo utiliza-se uma inversão numérica de laplace. Após cada processo iterativo, o termo fonte é atualizado com as expressões anteriores dos fluxos de nêutrons e das concentrações. Em virtude do emprego da transformada inversa numérica, faz-se necessário a reconstrução dos fluxos e das concentrações através de uma interpolação polinomial, mantendo sempre uma estrutura padrão. Este processo iterativo continua até que um critério de parada seja atingido.

2. METODOLOGIA

Partindo da equação de Cinética Espacial de Difusão de Nêutrons para dois grupos de energia seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, parâmetros nucleares não dependentes do tempo e do espaço, sem fonte externa e geometria cartesiana, meio unidimensional, tem-se:

$$\frac{1}{v_1}\frac{\partial \phi_1(x,t)}{\partial t} - \nabla^2 D_1\phi_1(x,t) + \Sigma_{\mathrm{R1}}\phi_1(x,t) = (1-\beta)[v_1\Sigma_{\mathrm{f1}}\phi_1(x,t)] + \underbrace{(1-\beta)[v_2\Sigma_{\mathrm{f2}}\phi_2(x,t)] + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i(x,t)}_{W}$$
$$\frac{1}{v_2}\frac{\partial \phi_2(x,t)}{\partial t} = \nabla^2 D_2\phi_2(x,t) + \Sigma_{\mathrm{a2}}\phi_2(x,t) + \Sigma_{\mathrm{s2}}\phi_1(x,t) \quad (1)$$
$$\frac{\partial C_i(x,t)}{\partial t} = \beta_i[v_1\Sigma_{\mathrm{f1}}\phi_1(x,t) + v_2\Sigma_{\mathrm{f2}}\phi_2(x,t)] - \lambda_i C_i(x,t)$$

Com $i = 1, \ldots, 6$.
Com (1) sujeita as seguintes condições de contorno:

$$\alpha_1\phi(0,t) + \beta_1\frac{\partial \phi(0,t)}{\partial x} = 0,$$
$$\alpha_2\phi(0,t) + \beta_2\frac{\partial \phi(0,t)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

Em que **W** representa o termo fonte da equação de fluxo rápido. Resolve-se então este sistema de equações através de um Método Iterativo de Fonte (MIF). O método consiste em fornecer uma distribuição inicial para o termo fonte **W** da equação do fluxo rápido, fazendo com que o sistema de equações torne-se desacoplado. Então resolve-se as equações de (1) separadamente.

Aplicando a Transformada de Laplace (TL) na primeira equação de (1), tem-se a equação de fluxo rápido transformada abaixo:

$$s\widehat{\phi_1}(x,s) - \phi_1(x,0) = \left[D_1\frac{d^2}{dx^2}v_1 - v_1\Sigma_{r1} + (1-\beta)v_1\Sigma_{f1}v_1\right]\widehat{\phi_1}(x,s) + \widehat{W}(x,s) \quad (3)$$

em que $\phi_1(x,0)$ é a solução do problema de difusão estacionário resolvido por ZANETTE (2017) interpolado num polinômio de terceiro grau da seguinte forma:

$$\phi_1(x,0) = k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0 \quad (4)$$

em que, $k_3, k_2, k_1\ e\ k_0$ são os coeficientes do polinômio interpolado do problema estacionário. Resolvendo-se a equação diferencial (3), tem-se:

$$\widehat{\phi_1}(x,s) = C_{h1}e^{\sqrt{\gamma_1}} + C_{h2}e^{-\sqrt{\gamma_1}} + F_1x^3 + G_1x^2 + H_1x + I_1 \quad (5)$$

Em γ_1 é dado por:

$$\gamma_1 = [a_1s + b_1 - h_{d1}],$$

Com as condições de contorno dadas em (2), pode-se obter as constantes C_{h1} e C_{h2}. Substituindo $C_{h1}\ e\ C_{h2}$ na equação do fluxo rápido tem-se a equação transformada escrita como:

$$\widehat{\phi_1}(x,s) = \left[\frac{F_1 e^{-\sqrt{\gamma_1}L} - I_1 L^3 - H_1 L^2 - G_1 L - F_1}{e^{\sqrt{\gamma_1}L} - e^{-\sqrt{\gamma_1}L}}\right] e^{\sqrt{\gamma_1}} + \left[-\left(\frac{F_1 e^{-\sqrt{\gamma_1}L} - I_1 L^3 - H_1 L^2 - G_1 L - F_1}{e^{\sqrt{\gamma_1}L} - e^{-\sqrt{\gamma_1}L}}\right) - F_1\right] e^{-\sqrt{\gamma_1}} + F_1 x^3 + G_1 x^2 + H_1 x + I_1 \quad (6)$$

Para resolvermos (7) utilizou-se uma inversão numérica através do algoritmo de Stehfest. Após a inversão numérica utilizou-se uma interpolação polinomial da forma de:

$$\phi_j(x,t) = y_1 + y_2 x + y_3 x^2 + y_4 t + y_5 x t + y_6 x^2 t, \quad (7)$$

onde, $y_1, \dots, y_6$ são os coeficientes do polinômio interpolado.

Analogamente a metodologia aplicada para resolver a equação do fluxo rápido pode-se resolver a equação do fluxo térmico substituindo-se $\phi_1(x,t)$ e aplicando a técnica da transformada de Laplcade na segunda equação de (1) e em seguida utilizando-se a inversão numérica. Da mesma maneira, as equações das concentrações são resolvidas substituindo-se $\phi_1(x,t)$ *e* $\phi_2(x,t)$ e aplicando a transformada de Laplace e invertidas através do algoritmo de inversão.

Logo, pode-se resolver o sistema de (1) através de um processo iterativo, descrito da seguinte forma:

1. Estimativa de $\phi_1^{[k]}, \phi_2^{[k]}\ e\ C_i^{[k]}$;
2. Resolve-se a equação do fluxo rápido;
3. Resolve-se a equação do fluxo térmico;
4. Resolve-se as equações das concentrações;
5. Teste do critério de parada $\frac{\left|\phi_j^{[k+1]} - \phi_j^{[k]}\right|}{\phi_j^{[k+1]}} < \varepsilon$;
6. Caso o critério de parada seja satisfeito finaliza-se o processo caso contrario atualiza-se o índice k e retorna-se ao item 1.

3. RESULTADOS

Para validar a metodologia proposta neste trabalho utilizou-se um algoritmo implementado na plataforma scilab aplicado a um problema com dois grupos de energia e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados com domínio $0 \le x \le 160\ cm$, $k_{eff} = 0{,}8520306528$ e parâmetros nucleares, dados pelas Tabelas 1, 2.

Tabela 1-Parâmetros Nucleares

$D[cm]$	1,0	0,5
$v[cm/s]$	$1{,}0x10^7$	$3{,}0x10^5$
$\Sigma_a[cm^{-1}]$	0,02	0,08
$\upsilon\Sigma_f[cm^{-1}]$	0,005	0,099
$\Sigma_{1\to2}[cm^{-1}]$	0,01	0

Tabela 2-Parâmetros Nucleares

i	β_i	$\lambda_i[s^{-1}]$
1	0,00025	0,0124
2	0,00164	0,0305
3	0,00147	0,1110
4	0,00296	0,3010
5	0,00086	1,1400

6	0,00032	3,0100

Como condição inicial utilizou-se a solução para a equação de difusão em estado estacionário resolvida por ZANETTE (2017).

Na Tabela 3 tem-se os valores dos fluxos, rápido e térmico para vários tempos.

Tabela 3-Fluxo do grupo 1 e do grupo 2

$Tempo(s)$	$\phi_1[cm^{-1}s^{-1}]$	$\phi_2[cm^{-1}s^{-1}]$
1	0,4518721	0,0558476
2	0,4353871	0,0538103
3	0,4189022	0,0517731
4	0,4024172	0,0497359
5	0,3859321	0,0476987
6	0,3694473	0,0456615
7	0,3529622	0,0436242
8	0,3364771	0,0415870
9	0,3199923	0,0395498
10	0,3035072	0,0375126

4. CONCLUSÕES

Analisando os resultados anteriores pode-se observar que a metodologia proposta neste trabalho é promissora e importante na solução do problema de cinética espacial de nêutrons. Através do método iterativo de fonte o sistema de equações torna-se desacoplado o que possibilita a solução das equações de forma separada tornando mais simples a solução do problema. Outra característica importante da metologia proposta neste trabalho é que o problema é resolvido de forma semi-analítica em cada iteração. Como perspectivas futuras para o trabalho pretende-se aplicar a mesma metodologia ao problema multirregião e analisar a convergência do método.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMS, M. L, and LARSEN, E. W, Fast iterative methods for discreteordinates particle transport calculations". Progress in Nuclear Energy, v. 40, pp.3{159(2002).

HASSANZADEH, H. and POOLDADI-DARVISH, M. Comparison of diferent numerical Laplace inversion methods for engineering applications". Applied mathematics and computation, v.189, pp.1966{1981(2007).

WILLERT, J., TAITANO, W. T. and KNOLL, D., Leveraging anderson acceleration for improved convergence of iterative solutions to transport systems". Journal of Computational Physics, v. 273, 122-132(2014).

SCHULZ, D, M, Métodos de Acelerção para a Solução da Equção de Transporte". 2017.Tese de Doutorado, PPGMAP/UFRGS, Porto Alegre/RS.

ZANETTE, R, Solucão da Equacão de Difusão de Nêutrons Multigrupo Multirregião Estacionária em Geometria Cartesiana pelo Método da Potência via Fronteiras Fictícias". 2017. Dissertação de Mestrado | PPGMAT/UFPEL, Pelotas/RS.