CONTROLE ÓTIMO LINEAR REALIMENTADO INTRODUZIDO NO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA COM DIFUSÃO MODIFICADO

DAIANE F. FRIGHETTO[1]; CAMILA P. DA COSTA[2]; ALEXANDRE MOLTER[3]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – daiafrighetto_94@hotmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – camila.costa@ufpel.edu.br*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – alexandre.molter@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

O disposição de indivíduos pode ser representada através do modelo difusivo linear, que combinado com termos de reação que correspondem a taxa de crescimento e interação entre os indivíduos, constitui um modelo de reação-difusão.

Se esse modelo representar a interação de duas espécies, cuja relação entre elas é do tipo presa-predador e o único alimento do predador é a presa, que cresce até um determinado nível, então tem-se o sistema de Lotka-Volterra com difusão modificado (MURRAY,2001), que foi analisado anteriormente por DUNBAR (1986), MURRAY (2003) e também é foco nos trabalhos de AZEVEDO (2013) e SABETI (2007).

É possível incluir uma função de controle nessa equação com o objetivo de preservar espécies ameaçadas, bem como controlar o crescimento de populações que são prejudiciais a determinadas atividades humanas. Um exemplo é controlar a quantidade de pragas numa lavoura, a fim de reduzir o prejuízo econômico.

Dessa forma, este trabalho objetiva apresentar um estratégia de controle inserida no sistema de Lotka-Volterra com difusão modificado, considerando a teoria de solução por onda viajante e a teoria de controle ótimo realimentado para sistemas não lineares a fim de levar o sistema biológico ao estado de equilíbrio desejado.

2. METODOLOGIA

Considera-se que o movimento dos indivíduos no espaço ocorre da menor concentração para a maior concentração, obedecendo a lei de Fick, obtém-se o modelo, no tempo contínuo, de Lotka-Volterra com difusão constituído de EDPs:

$$\begin{cases} w_t = aw\left(1-\frac{w}{K}\right) - bwv + D_1 w_{xx}, \\ v_t = \varsigma wv - dv + D_2 v_{xx}, \end{cases} \tag{1}$$

onde $w = w(x,t)$ representa as presas e $v = v(x,t)$ os predadores em função do tempo e do espaço, K é a capacidade de suporte da presa, a a taxa de reprodução da população de presas, b e ς são as taxas que medem os efeitos da interação de presas e predadores, d a taxa de mortalidade de predadores, D_1 é coeficiente de difusão das presas e D_2 o coeficiente de difusão de predadores. No estado adimensional, considerando as mudanças de variáveis $\bar{w} = w/K$, $\bar{v} = bv/a$, $\bar{t} = at$ e $\bar{x} = x(\frac{a}{D_2})^{1/2}$, onde $\bar{D} = D_1/D_2$, $\bar{a} = cK/a$ e $\bar{b} = d/(\varsigma K)$, o sistema (1) torna-se:

$$\begin{cases} w_t = w(1-w-v) + Dw_{xx}\ , \\ v_t = av(w-b) + v_{xx}\ . \end{cases} \tag{2}$$

Observa-se que para fins de simplificação de notação, a "barra" foi desconsiderada e D representa a razão entre os dois coeficientes de difusão $D = D_1/D_2$.

Considerando que o comportamento dispersivo ocorre através de “frentes de invasão”, admita-se então que o sistema (2) tenha solução por onda viajante das formas:

$$w(x,t) = w(x+ct) = W(z) \;\; onde \;\; z = x+ct, \quad (3)$$

$$v(x,t) = v(x+ct) = V(z) \;\; onde \;\; z = x+ct, \quad (4)$$

que representam a movimentação da onda viajante para o lado esquerdo de x.

Aplicando a teoria de solução por onda viajante e calculando as derivadas, o sistema (2) é escrito na forma de equações diferenciais ordinárias, e encontra-se:

$$\begin{cases} DW'' - cW' = -W(1-W-V), \\ V'' - cV' = -aV(W-b)\,. \end{cases} \quad (5)$$

Outra simplificação que pode ser feita é considerar um sistema biológico planctônico-herbívoro, que consiste num sistema caracterizado pela interação de espécies que flutuam na superfície das águas de oceanos, mares e lagos chamados plâncton e animais que se alimentam de plantas (vegetais), na qual somente o herbívoro se desloca, conforme encontramos em DUNBAR (1986) e MURRAY (2001).

Nesse sistema, o coeficiente D_1, que representa a difusão das presas, é muito menor que o coeficiente de difusão de predadores, definido por D_2. Desse modo, como $D = D_1/D_2$, tem-se que $D \cong 0$ e assim consegue-se simplificar o sistema (5) da seguinte forma:

$$\begin{cases} cW' = W(1-W-V), \\ V'' - cV' = -aV(W-b)\,. \end{cases} \quad (6)$$

Transformando a segunda equação do sistema (6) em duas EDOs de primeira ordem considerando a mudança de variável:

$$Z = V', \quad (7)$$

e assim tem-se um sistema não linear com três equações:

$$\begin{cases} W' = \frac{W(1-W-V)}{c}, \\ V' = Z\,, \\ Z' = cZ - aV(W-b)\,. \end{cases} \quad (8)$$

A partir do sistema (8) introduz-se funções de controle a fim de controlar o sistema e levá-lo para o estado de equilíbrio desejado. Para isso, utiliza-se a teoria de controle linear realimentado para sistemas não lineares, seguindo as ideias de RAFIKOV et al. (2008). Desse modo, acrescenta-se uma função de controle da forma: $U_i = u_i^* + u_i$, com $i = 1,2,3$, no sistema (8) obtendo-se:

$$\begin{cases} W' = \frac{W(1-W-V)}{c} + U_1\,, \\ V' = Z + U_2, \\ Z' = cZ - aV(W-b) + U_3\,, \end{cases} \quad (9)$$

em que u_1^*, u_2^* e u_3^* são os níveis desejados do controle, e u_1, u_2 e u_3 são responsáveis por controlar o sistema, conforme RAFIKOV et al. (2008). Substituindo U_1, U_2 e U_3 consegue-se obter as funções que são responsáveis por estabilizar o sistema em torno do nível ótimo desejado, dadas por:

$$\begin{cases} u_1^* = \dfrac{-W^*(1-W^*-V^*)}{c}, \\ u_2^* = -Z^*, \\ u_3^* = -cZ^* + aV^*(W^*-b)\,. \end{cases} \quad (10)$$

Pode-se ainda, substituir as relações encontradas para u_1^*, u_2^* e u_3^* em (10) no sistema (9) e encontra-se:

$$\begin{cases} W' = W - W^* - W^2 + {W^*}^2 - VW + V^*W^* + u_1, \\ V' = Z - Z^* + u_2, \\ Z' = cZ - cZ^* - aVW + aV^*W^* + abV - abV^* + u_3. \end{cases} \quad (11)$$

Agora, define-se:

$$\begin{array}{lcl} W = y_1 + W^* & \rightarrow & y_1 = W - W^*, \\ V = y_2 + V^* & \rightarrow & y_2 = V - V^*, \\ Z = y_3 + Z^* & \rightarrow & y_3 = Z - Z^*, \end{array} \qquad (12)$$

como as perturbações do sistema. Nota-se que o sistema (11) pode ser reescrito considerando (12). Assim tem-se:

$$\begin{cases} {y_1}' = y_1\,(1 - 2W^* - V^*) - {y_1}^2 - y_1 y_2 - y_2 W^* + u_1, \\ {y_2}' = y_3 + u_2, \\ {y_3}' = c y_3 - a y_2 (b - W^*) - a y_1 y_2 - a y_1 V^* + u_3. \end{cases} \qquad (13)$$

que pode ser reescrito na forma $Y' = AY + H(Y) + Bu$, como:

$$\begin{bmatrix} {y_1}' \\ {y_2}' \\ {y_3}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2W^* - V^* & -W^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -aV^* & a(b - W^*) & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -{y_1}^2 - y_1 y_2 \\ 0 \\ -a y_1 y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

sendo que W^* e V^* são constantes conhecidas através do problema biológico estudado, A é a matriz de coeficientes constantes que acompanha os termos lineares, $H(Y)$ é um vetor dos termos não lineares e B é a matriz que acompanha as funções de controle.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir do sistema (13), considera-se o teorema (1) proposto por RAFIKOV et al. (2008), para determinar a função de controle, conforme segue:

Teorema 1: Se existirem matrizes Q e R, positiva definidas, sendo Q simétrica, tais que a função:

$$L(Y) = Y^T Q Y - H(Y)^T P Y - Y^T P\, H(Y), \qquad (15)$$

seja positiva definida, então o controle linear U dado por:

$$u = -\kappa\, Y, \qquad (16)$$

onde $\kappa = R^{-1} B^T P$, é ótimo para transferir o sistema não-linear (14) a partir de qualquer estado inicial ao estado final $\lim_{t \to \infty} Y(t) = 0$, minimizando o funcional:

$$J = \int_0^\infty (L(Y) + u^T R u)\, dt, \qquad (17)$$

onde a matriz simétrica positiva definida $P(\forall \ t \geq 0)$ é a solução da formulação matricial da equação algébrica de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q = 0, \qquad (18)$$

que tem uma única solução positiva simétrica $P > 0$ para quaisquer $R > 0$ e $Q \geq 0$ dadas. Além disso, tomando a função de Lyapunov $v = Y^T P Y$, verifica-se que $\dot{v}$ é negativa definida, e consequentemente, o sistema controlado (13) tem estabilidade global.

Assim, consegue-se determinar os valores da matriz ganho κ e consequentemente, a função de controle. De forma genérica tem-se:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Agora, conhecida a função de controle (19), pode-se substituí-la no sistema perturbado (13) e encontra-se:

$$\begin{cases} {y_1}' = y_1\,(1 - 2W^* - V^*) - {y_1}^2 - y_1 y_2 - y_2 W^* + \kappa_{11} y_1 + \kappa_{12} y_2 + \kappa_{13} y_3, \\ {y_2}' = y_3 + \kappa_{21} y_1 + \kappa_{22} y_2 + \kappa_{23} y_3, \\ {y_3}' = c y_3 - a y_2 (b - W^*) - a y_1 y_2 - a y_1 V^* + \kappa_{31} y_1 + \kappa_{32} y_2 + \kappa_{33} y_3. \end{cases} \qquad (20)$$

É possível resolver numericamente o sistema (20) obtendo as trajetórias temporais. Desse modo, a estratégia de controle proposta pode ser aplicada à problemas que envolvem duas espécies, cuja relação é do tipo presa-predador. Portanto, os coeficientes, bem como a distribuição das funções de controle, são específicos de cada problema biológico.

4. CONCLUSÕES

A estratégia de controle ótimo linear realimentado, apresentada nesse trabalho de forma genérica, pode ser aplicada em sistemas biológicos cuja interação é regida pelo sistema de Lotka-Volterra com difusão modificado. Concluí-se que a estratégia proposta deve levar o sistema, indiferentemente das condições iniciais, ao estado de equilíbrio desejado, que é informado através de experimentos biológicos. Como continuidade desse trabalho, pretende-se considerar um sistema biológico real e aplicar a estratégia de controle.

5. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece a CAPES pelo auxílio financeiro na realização do trabalho.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, F. **Sistemas ecológicos modelados por equações de reação-difusão**. 2013. 71 p. Tese (Doutorado em Física Teórica) — Programa de Pós-Graduação em Física – Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista (UNESP).

DUNBAR, Steven R. Traveling waves in diffusive predator–prey equations: periodic orbits and point-to-periodic heteroclinic orbits. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 46, n. 6, p. 1057-1078, 1986.

MURRAY, J. **Mathematical Biology.** II Spatial Models and Biomedical, Applications Interdisciplinary Applied Mathematics, v.18, Springer-Verlag, 2001.

SABETI, Mehran**. Soluções de ondas viajantes em um sistema difuso predador-presa não local**. 2007. 106 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Pós-Graduação em Matemática Aplicada - Universidade Federal do Paraná.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. M.; VON BREMEN, H. Mathematical modeling and control of population systems: applications in biological pest control. **Applied Mathematics and Computation**, v.200, n.2, p.557-573, 2008.