APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE KUTTA NO DECAIMENTO DE UM RADIOISÓTOPO

FLÁVIA FETTER[1]; CELINA BOLIVAR[2]; FRANCIELE PORTO[3]; MIRIANE AZEVEDO[4]; SABRINA BALDEZ[5]; LAUREN FARIAS[6]

[1]Universidade Federal de Pelotas - fetterflavia@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – celinaengeo2013@gmail.com
[3]Universidade Federal de Pelotas – frannbot@gmail.com
[4]Universidade Federal de Pelotas - mirianegeoproc@gmail.com
[5]Universidade Federal de Pelotas – saduartebaldez@hotmail.com
[6]Universidade Federal de Pelotas – lauren.if@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

No âmbito científico contemporâneo, o processo de modelagem possui uma função essencial na busca por respostas, auxiliando o homem a compreender os acontecimentos do dia a dia (BRANDÃO, 2008).

Diante disso, os fenômenos físicos podem ser descritos por meio de modelagens matemáticas, a qual destacam-se as equações diferenciais, que possuem grande importância para engenharia e às ciências exatas e da terra.

Uma dessas aplicações, consiste em uma área extremamente comum na Geologia. É a Geocronologia, que se dedica a estudar a idade das rochas que formam a crosta terrestre e, a partir delas, a idade da Terra. A faixa de tempo, porém, não é medida em décadas ou séculos, é bem mais ampla, o tempo geológico só trabalha com milhões ou bilhões de anos. Segundo Branco (2016), a ciência, para esse tipo de estudo, utiliza dois tipos de datação, a relativa e a absoluta. A relativa vincula a idade do material aos demais elementos ao local em que se encontra, em estado original. A absoluta utiliza os princípios físicos da radioatividade que se fundamenta no princípio da desintegração radioativa. Este último também chamado de decaimento, leva em consideração que, entre os elementos químicos existentes, conforme descrição de Martins (2016), alguns apresentam um núcleo instável que, com o passar do tempo e através da emissão de radiação, tornam-se estáveis.

Esse processo de desintegração espontâneo ocorre a um intervalo de tempo diferente e constante para cada elemento. Decaimento ou meia-vida é o tempo necessário para que metade da massa do elemento instável se estabilize. As rochas são constituídas de minerais, que por sua vez são compostos por elementos químicos, muitos dos quais são radioativos, isto é, possuem núcleo instável. Pelo tipo de elemento encontrado na rocha e, sabendo-se com que velocidade ocorre esse processo, determina-se a quantidade do elemento formado e, portanto, o período em que o processo vem ocorrendo na rocha. Esse tempo será sua idade.

Tratando-se de fenômenos físicos naturais, modelados por equações diferenciais, tais formulações nem sempre possuem soluções exatas. Para encontrar soluções aproximadas utiliza-se a modelagem numérica.

Para que se possa resolver esse tipo de problema, a qual se beneficia de amplas técnicas numéricas, destaca-se o método de Runge Kutta, por ser uma técnica simples e de grande precisão, quando comparado a outros métodos existentes.

Desta forma, o objetivo do presente trabalho é comprovar a eficiência da aplicação de um método numérico na avaliação de um fenômeno natural, como a alteração de um elemento radioisótopo.

2. METODOLOGIA

Na realização do trabalho utilizou-se um radioisótopo de meia vida de 16 dias. O intuito é, aos 30 dias do experimento, obter 30g desse radioisótopo. Para isso, deve-se buscar, através do cálculo, identificar a quantidade inicial necessária para alcançar esse valor final.

Sendo assim, pôde-se modelar matematicamente o problema, adotando-se o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dY}{dx} = -kY \\ Y\,(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{1}$$

A solução geral é apresentada na Eq. (2):

$$Y(x) = Y_o e^{(0-x)k} = Y_0 e^{-kx} \tag{2}$$

Substituindo $t = 16$ dias, tem-se a constante de decaimento.

$$k = -0{,}043321698785 \tag{3}$$

Os métodos numéricos são uma saída para se encontrar uma solução aproximada para problemas deste tipo. A diferença entre eles é a técnica de resolução, diferenciando-se na complexidade de execução e nos resultados obtidos.

O método utilizado para realização deste problema foi o Runge Kutta 4º ordem (RK4). Segundo Zill e Cullen (2001), é considerado um dos mais populares, e vai desde o método simples, 1ª ordem ao de 4ª ordem, sendo este último, também um dos mais precisos para obter soluções aproximadas de valor inicial. Cada método de Runge Kutta consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função a cada passo.

Para que a aproximação fosse realizada, utilizou-se o *software* Maple (versão 17.0), no qual a configuração da máquina para execução do mesmo consistiu em um Windows 7 com o processador de 500 *ram* de memória e sistema operacional de 64 bits. O algoritmo criado nesta linguagem pode ser observado no Anexo I.

O método RK4 para este PVI é dado pelas seguintes equações:

$$h = \frac{x_f - x_0}{N} \tag{4}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{5}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} . k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} . k_2\right) \\ k_4 = f\,(x_i + h\,, y_i + h\,.\,k_3) \end{cases} \tag{6}$$

A partir da Equação 4, foi utilizado o passo de tempo $h = -1$, que corresponde ao tamanho do intervalo de cada iteração, a Equação 2 consiste na equação iterativa para aproximação da variável y_i (concentração inicial) e a Equação 3 apresenta as inclinações dos pontos nos intervalos.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Aplicando o PVI na solução geral (Equação 2), uma vez que desejamos obter 30g de material ao final de 30 dias, determinamos analiticamente que a quantidade de material radioativo inicial foi de 110,0404853g.

Numericamente, através do algoritmo utilizado, após 30 iterações obtivemos como resultado para o mesmo PVI 110,0404812g de isótopo radioativo, conforme mostra a Figura 1.

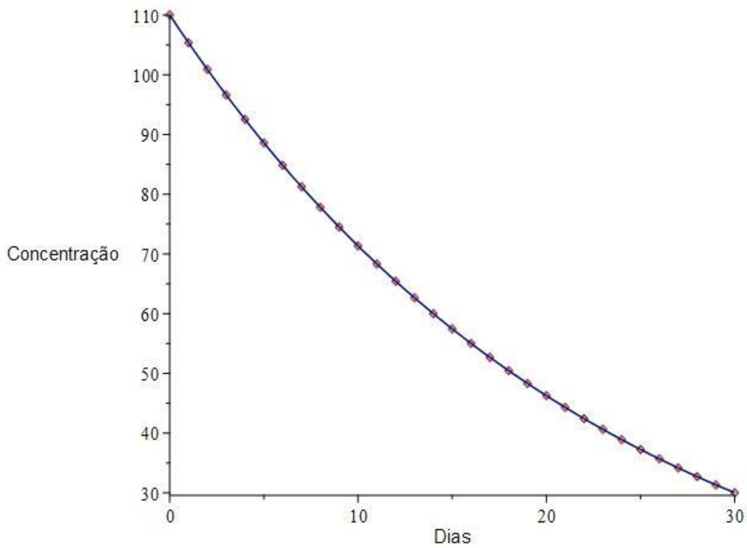

Figura 1 - Gráfico do Decaimento do Radioisótopo.

Ao analisarmos o gráfico acima, observamos que nos eixos das ordenadas (y) temos a quantidade de material radioativo em gramas que varia ao longo dos 30 dias, que está demonstrado no eixo das abcissas (x). Logo, antes do decaimento de meia vida de 16 dias de acordo com o problema, o isótopo continha 110g de material radioativo, ou seja, no dia 30 o isótopo passou a ter 30g radioatividade. A curva contínua representa a função real, enquanto a curva pontilhada apresenta os pontos aproximados calculados em cada iteração.

Após obter o valor aproximado com a técnica numérica utilizada, foi possível obter o erro relativo percentual, através da Equação 7, em relação ao valor exato calculado analiticamente.

$$\varepsilon_{\%} = \frac{Valor_{Real} - Valor_{Aproximado}}{Valor_{Real}}.100 \tag{7}$$

O mesmo foi de 0,00000372590%, evidenciando assim, o sucesso na aplicação do método de Runge Kutta implementado pelo algoritmo numericamente.

A precisão em relação a aplicação do método pode ser melhor detalhada segundo a Tabela 1, no qual observa-se a proximidade nos valores resultantes para a variável de forma exata, através da solução analítica e numérica, utilizando RK4 e uma rotina no Maple.

t (dias)	Valor exato	Valor aproximado
30	30 g	30 g
25	37,25573432 g	37,25573414 g
20	46,26632481 g	46,266632421 g
15	57,4561969 g	57,45619581 g
10	71,35242698 g	71,35242519 g
5	88,60956885 g	88,6095661 g
0	110,0404853 g	110,0404812 g

Tabela 1 – Comparação dos Métodos.

4. CONCLUSÕES

A partir da aplicação do método utilizado notou-se a importância desta ferramenta nas engenharias, podendo alcançar relativa precisão em diversos estudos que tem por base os fenômenos naturais.

Diante disso, é possível resolver inúmeros problemas práticos ao longo do exercício da profissão. Observa-se também a facilidade na aplicação do método que comparado a outros já existentes, possui uma grande eficiência e precisão nos resultados. A motivação para este trabalho deu-se no intuito de testar a eficiência do método em uma aplicação das ciências exatas e da terra e validar o algoritmo, visando a sua aplicação em demais problemas semelhantes que não obtenham solução exata.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRANCO, P. de M. **Como Sabemos a Idade das Rochas?** Serviço Geológico do Brasil, 2016.

BRANDÃO, R. V.; ARAÚJO, I. S.; VEIT, E. A. **A modelagem científica de fenômenos físicos e o ensino de física.** Física na Escola, v.9, 2008.

MARTINS, V. T. de S.; BABINSKI, M. **Geocronologia: O tempo registrado nas rochas.** Instituto de Geociências. USP. 2017.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R.; **Métodos numéricos para equações diferenciais ordinária**s.3. São Paulo. Pearson Makron Books, 2001.