UMA NOVA METODOLOGIA PARA O CÁLCULO DE LIMITES NO INFINITO, DE FUNÇÕES RACIONAIS DE POLINÔMIOS ENVOLVENDO RADICAIS

ENILSON RODRIGUES NUNES[1]; MAURÍCIO ZAHN[2]; ALEXANDRE MOLTER[3]
[1]Universidade Federal de Pelotas– enilsonrn@hotmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas (co-orientador) – mauricio.zahn@ufpel.edu.br
[3]Universidade Federal de Pelotas (orientador) – alexandre.molter@yahoo.com.br

1. INTRODUÇÃO

O cálculo de limites é visto na primeira disciplina de cálculo da graduação, onde um número grande de graduandos apresentam inúmeras dificuldades, como pode ser visto no trabalho de PEREIRA (2009). Dentre as dificuldades apresentadas pelos graduandos está a resolução de limites no infinito, de funções racionais de polinômios envolvendo radicais. Como exemplo ilustrativo, propõe-se resolver, na forma apresentada nos livros de cálculo Anton, Bivens e Davis (2007), Stewart (2009) o seguinte limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2\ -2}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{5x^2-2}}{|x|}}{\frac{x+3}{|x|}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{5x^2-2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x+3}{-x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{5x^2-2}{x^2}}}{\frac{x+3}{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}{\frac{x}{-x}+\frac{3}{-x}}=\frac{\sqrt{5-0}}{-1+0}=-\sqrt{5}$$

Através deste exemplo pode-se notar que ao utilizar a metodologia apresentada nos nestes livros, estes cálculos podem se tornar maçantes, dependendo da função da qual se pretende encontrar o limite. A partir de estudos realizados sobre o cálculo de limites, percebeu-se um padrão nos diferentes exercícios estudados. Após uma série de testes, elaborou-se uma metodologia alternativa para obter o limite de funções racionais de polinômios envolvendo radicais. Esta metodologia tem por finalidade simplificar os cálculos, e por vezes, obter o resultado, sem necessidade de cálculos muito elaborados. Mas, ao propor uma nova metodologia deste tipo, deve-se levar em conta que todos os passos devem ser mostrados e sua funcionalidade provada. Neste trabalho, não serão apresentados todos os passos, pelo motivo destes serem muito extensos e não haver espaço para as discussões necessárias para o desenvolvimento de toda proposta. A apresentação aprofundada sobre a metodologia proposta será feita num trabalho completo, que será submetido para um periódico especializado no tema. Aqui se apresentará apenas os resultados obtidos para os cálculos que envolvem radicais de índices pares.

2. METODOLOGIA

Inicialmente, para análise das diversas possibilidades dos limites no infinito, assume-se que n, m e α pertencem ao conjunto dos números naturais, com α par. Considera-se $n\leq\ \alpha m$, o que se subdividirá em dois casos, $n<\ \alpha m$ e $n=\alpha m$. Para estes dois casos, se analisará o limite quando a variável x tende a menos infinito e quando a variável x tende a mais infinito, levando em conta as seguintes subdivisões para cada uma das duas tendências: $\sqrt[\alpha]{f(x)}$ com $b_m>0$, $\sqrt[\alpha]{f(x)}$ com $b_m<0$, $-\sqrt[\alpha]{f(x)}$ com $b_m>0$, $-\sqrt[\alpha]{f(x)}$ com $b_m<0$, onde $0 < f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. O coeficiente b_m será apresentado na seção que segue.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considerando os passos citados na metodologia, apresenta-se o seguinte Teorema:

Teorema. *Sejam $k \in R$, $\alpha \in N$, onde α é* par, *f, g: $R \rightarrow R$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, com $a_n>0$ e $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$, funções polinômios, tal que $n \leq \alpha m$, tem-se:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm\sqrt[\alpha]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0} \pm k}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \left[\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\pm\sqrt[\alpha]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0} \pm k}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= sgn\left(\frac{\sqrt[\alpha]{a_n x^n}}{b_m x^m}\right)\frac{\sqrt[\alpha]{an}}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{x^{\alpha m}}$$

Observações:

i) Ao analisar-se o sinal de $\sqrt[\alpha]{a_n x^n}$, considera-se o termo $a_n x^n$ sempre positivo, pois se trata de um radical de índice par;

ii) O termo $\frac{\sqrt[\alpha]{a_n}}{b_m}$ será considerado sempre positivo, pois seu sinal será analisado pela função sinal.

Tem-se dois casos a analisar, quando $n < \alpha m$ e quando $n = \alpha m$.

1º caso: se $n < \alpha m$, tem-se:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm\sqrt[\alpha]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0} \pm k}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = sgn\left(\frac{\sqrt[\alpha]{a_n x^n}}{b_m x^m}\right)\frac{\sqrt[\alpha]{a_n}}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{x^{\alpha m}} = 0.$$

2º caso: se $n = \alpha m$, tem-se:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pm\sqrt[\alpha]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0} \pm k}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = sgn\left(\frac{\sqrt[\alpha]{a_n x^n}}{b_m x^m}\right)\frac{\sqrt[\alpha]{a_n}}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{x^{\alpha m}}$$

$$= sgn\left(\frac{\sqrt[\alpha]{a_n x^n}}{b_m x^m}\right)\frac{\sqrt[\alpha]{a_n}}{b_m}.1 = sgn\left(\frac{\sqrt[\alpha]{a_n x^n}}{b_m x^m}\right)\frac{\sqrt[\alpha]{a_n}}{b_m}.$$

A prova completa do Teorema, enunciado acima, será feita num trabalho futuro, pois demanda diversas análises e discussões. Assim, neste trabalho irá se resolver o exemplo apresentado na introdução pela metodologia enunciada no teorema, e logo após se utilizará uma tabela com mais exemplos de limite, comparando o método tradicional e o estabelecido pelo teorema.

Do exemplo apresentado na introdução $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3}$, tem-se:

- m que é o maior grau do polinômio do denominador é igual a 1, α que é o índice da raiz é igual a 2,então $\alpha m = 2.1 = 2$;
- n que é o maior grau do polinômio que está no numerador é igual a 2;
- Portanto $\alpha m = n = 2$.

Então:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2\ -2}}{x+3}=\ sgn\left(\frac{\sqrt[\alpha]{a_nx^n}}{b_mx^m}\right)\frac{\sqrt[\alpha]{an}}{b_m}=\frac{+\sqrt{5}}{-\ 1}=-\sqrt{5}$$

Outros exemplos:

MÉTODO TRADICIONAL	TEOREMA $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\pm\sqrt[\alpha]{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}\pm k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$ $=\ sgn\left(\frac{\sqrt[\alpha]{a_nx^n}}{b_mx^m}\right)\frac{\sqrt[\alpha]{a_n}}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{x^{\alpha m}}$
$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[8]{x^{14}-\ 21x^{13}+x^{11}+18x}\ +35}{-x^2+5x-3}$ $=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt[8]{x^{14}-\ 21x^{13}+x^{11}+18x}+35}{x^2}}{\frac{-x^2+5x-3}{x^2}}$ $=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt[8]{x^{14}-\ 21x^{13}+x^{11}+18x}}{\sqrt[8]{x^{16}}}+\frac{35}{x^2}}{\frac{-x^2+5x-3}{x^2}}$ $=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[8]{\frac{x^{14}}{x^{16}}-\frac{21\,x^{13}}{x^{16}}+\frac{x^{11}}{x^{16}}+\frac{18x}{x^{16}}}+\frac{35}{x^2}}{\frac{-x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}$ $=\frac{0}{1}=0$	$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[8]{x^{14}-\ 21x^{13}+x^{11}+18x}\ +35}{-x^2+5x-3}$ O índice da raiz é 8 e o maior grau do denominador é 2,ou seja, $8.2=16$, que é maior que 14, valor do maior grau do radicando, portanto o resultado deste limite é zero. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[8]{x^{14}-21x^{13}+x^{11}+18x}+35}{-x^2+5x-3}$ $=0$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{2x^{32}-7x^{23}-x}-27}{5x^8-14x^5+3x}$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt[4]{2x^{32}-7x^{23}-x}-27}{x^8}}{\frac{5x^8-14x^5+3x}{x^8}}$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt[4]{2x^{32}-7x^{23}-x}}{\sqrt[4]{x^{32}}}-\frac{27}{x^8}}{\frac{5x^8-14x^5+3x}{x^8}}$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{2x^{32}}{x^{32}}-\frac{7x^{23}}{x^{32}}-\frac{x}{x^{32}}}-\frac{27}{x^8}}{\frac{5x^8}{x^8}-\frac{14x^5}{x^8}+\frac{3x}{x^8}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{5}$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{2x^{32}-7x^{23}-x}-27}{5x^8-14x^5+3x}=(*)$ O índice da raiz é 4 e o maior grau do denominador é 8, ou seja, $4.8=32$, que é igual ao valor do maior grau do radicando, portanto tem-se: $(*)=\ sgn\left(\frac{\sqrt[\alpha]{a_nx^n}}{b_mx^m}\right)\frac{\sqrt[\alpha]{a_n}}{b_m}==\frac{\sqrt[4]{2}}{5}$

Salienta-se que está em andamento a prova para os radicais de índices ímpares. Também analisar-se-á com polinômios no numerador e radicais no denominador, para radicais de índices pares e ímpares, que serão mostrados em trabalhos posteriores.

4. CONCLUSÕES

No presente trabalho apresentou-se uma alternativa que facilita os cálculos de limites no infinito de funções racionais de polinômios envolvendo radicais.

Inicialmente bastou uma análise da multiplicação entre o índice do radical e o maior grau do denominador, comparando o resultado com o valor do maior grau do radicando. A partir desta simples análise, poderá se obter o resultado sem realizar nenhum cálculo, pois se saberá se este limite é zero, ou, caso seja diferente de zero, se considerará o radical e o coeficiente que acompanha o termo de maior grau do radicando e o coeficiente que acompanha o termo de maior grau do denominador. Ambos serão considerados maiores que zero para não interferir no estudo de sinal que envolve o termo que acompanha o radical, os termos de maior grau do radicando e do denominar com seus respectivos coeficientes. De posse deste sinal, tem-se o resultado, proporcionando agilidade e menor possibilidade de erro aos alunos. Análises mais detalhadas do teorema enunciado neste texto, serão feitas em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H.; BIVENS, I. C.; DAVIS, S. L. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2007, volume I.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade**. 2009. 182 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Curso de Pós-graduação em Ensino da matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2009, volume I.