ANÁLISE NUMÉRICA PARA DIFERENTES PROCESSOS DE MULTIPLICAÇÃO INTERVALAR

DIRCEU A. MARASCHIN JR[1]; LUCAS MENDES TORTELLI[2]; ALICE F. FINGER[3]; ALINE B. LORETO[4]

[1]Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – dmaraschin@inf.ufpel.edu.br
[2] Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – lmtortelli@inf.ufpel.edu.br
[3]Universidade Federal do Pampa (Unipampa) – alicefinger@unipampa.edu.br
[4]Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) – aline.loreto@ufsm.br

1. INTRODUÇÃO

Computadores utilizam uma aritmética de precisão finita, portanto operam sobre o padrão IEEE 754, a qual realiza uma aproximação do espaço de números reais. Nesse aspecto, a exatidão numérica fica comprometida, acrescenta-se ainda o problema causado por erros numéricos como arredondamentos e truncamentos.

Uma forma de contornar tais problemas é por meio da modelagem de incerteza, onde se pode considerar a aritmética intervalar como alternativa para obter resultados com maior qualidade. Em situações práticas, se dois valores são possíveis, de tal forma que $x_1 < x_2$, então os valores intermediários também são possíveis e, dessa forma, o conjunto desses valores é um intervalo fechado tal que $[x_1, x_2]$ (LORKOWSKI, 2015). Depois da aritmética clássica definida por Moore em 1966, novos métodos foram definidos acerca da aritmética intervalar partindo dos princípios de Moore.

Com diferentes abordagens para a computação intervalar, o presente trabalho tem por objetivo analisar a qualidade do resultado de quatro métodos diferentes para a multiplicação intervalar: multiplicação definida por Moore (MOORE, 2009); multiplicação seguindo os conceitos de Kaucher (KAUCHER, 1980); produto intervalar de Vaccaro (VACCARO, 2001), baseado em regiões e, por fim, multiplicação seguindo a aritmética multidimensional RDM, de Piegat e Landowski (PIEGAT *and* LANDOWSKI, 2013). A análise qualitativa será feita com base nas métricas de diâmetro e erro absoluto dos intervalos.

2. METODOLOGIA

Para a obtenção dos resultados intervalares, optou-se por utilizar uma equação matemática do trabalho de Landowski (PIEGAT *and* LANDOWSKI, 2013), para a qual duas outras formas foram escritas, conforme abaixo:

$$C = A - A^2 \tag{1}$$

$$C = A \times (1 - A) \tag{2}$$

$$C = (A - 1) + (1 - A) \times (1 + A) \tag{3}$$

A partir isso, a operação de multiplicação seguindo os conceitos de cada aritmética utilizada para a obtenção dos resultados será descrita no que segue.

2.1 Multiplicação Intervalar De Moore

Segundo a definição de Moore (MOORE, 2009), o resultado intervalar é um conjunto contendo as operações realizadas sobre todos os pares de números a partir das duas séries iniciais.

Abaixo, a operação de multiplicação definida na aritmética de Moore é descrita:

$$[x_1,x_2] \times [y_1,y_2] = [\min\{x_1y_1,x_1y_2,x_2y_1,x_2y_2\}, \max\{x_1y_1,x_1y_2,x_2y_1,x_2y_2\}]$$

Caso ambos os intervalos forem estritamente positivos, a operação pode ser simplificada. Nessa aritmética apenas os extremos do intervalo são considerados, os quais obedecem à regra $x_1 \leq x_2$.

2.2 Multiplicação Intervalar Segundo Kaucher

A aritmética de Kaucher (KAUCHER, 1980) permite intervalos impróprios, onde a restrição $x_1 \leq x_2$, como em Moore, não é mais necessária. A generalização do espaço intervalar formado pela aritmética de Kaucher é denotada por $\mathbb{KR}$.

O produto intervalar de Kaucher será descrito na Tabela 1, utilizando-se a representação das operações a partir de quatro subespaços: $P = \{x \in \mathbb{KR} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, para intervalos positivos; $Z = \{x \in \mathbb{KR} \mid x_1 \leq 0 \leq x_2\}$, contendo o valor zero; $-P = \{x \in \mathbb{KR} \mid -x \in \mathbb{P}\}$, onde intervalos negativos estão contidos e, $dual\ Z = \{x \in \mathbb{KR} \mid dual\ x \in Z\}$, para valores contidos em zero ($dual\ [x_1, x_2] = [x_2, x_1]$).

Tabela 1. Multiplicação intervalar de Kaucher

Subespaços	*y* ∈ *P*	*y* ∈ *Z*	*y* ∈ *-P*	*y* ∈ *dual Z*
x* ∈ *P	$[x_1y_1,x_2y_2]$	$[x_2y_1,x_2y_2]$	$[x_2y_1,x_1y_2]$	$[x_1y_1,x_1y_2]$
x* ∈ *Z	$[x_1y_2,x_2y_2]$	$[\min\{x_1y_2,x_2y_1\}, \max\{x_1y_1,x_2y_2\}]$	$[x_2y_1,x_1y_1]$	*0*
x* ∈ *-P	$[x_1y_2,x_2y_1]$	$[x_1y_2,x_1y_1]$	$[x_2y_2,x_1y_1]$	$[x_2y_2,x_2y_1]$
x* ∈ *dual Z	$[x_1y_1,x_2y_1]$	*0*	$[x_2y_2,x_1y_2]$	$[\max\{x_1y_1,x_2y_2\}, \min\{x_1y_2,x_2y_1\}]$

O intervalo $[x_1, x_2]$ é chamado próprio quando a condição $x_1 \leq x_2$ é satisfeita, quando $x_1 \geq x_2$ o intervalo é denominado impróprio, ou ainda, quando $x_1 = x_2$ diz-se que o intervalo é degenerado.

2.3 Multiplicação Intervalar De Vaccaro

A proposta de Vaccaro (VACCARO, 2001) para a multiplicação intervalar se baseia na separação de fronteiras. Dessa forma, dado um intervalo pertencente ao espaço intervalar ($\mathbb{IR}$), este intervalo pertencerá a somente uma dentre oito regiões definidas: O, I, BI, II, BII, III, BIII e IV.

A partir dessa nomenclatura, os intervalos são selecionados conforme um conjunto de regras. O Quadro 1 as apresenta juntamente com sua nomenclatura.

Quadro 1. Análise de regiões para multiplicação de Vaccaro

O	$x_1 = x_2 = 0$	intervalo nulo
I	$0 < x_1 \leq x_2$	Intervalo estritamente positivo
BI	$0 = x_1 < x_2$	intervalo não negativo
II	$(x_1 < 0 < x_2) \wedge (\lvert x_1\rvert < x_2)$	intervalo não assimétrico positivo
BII	$(x_1 < 0 < x_2) \wedge (\lvert x_1\rvert = x_2)$	intervalo simétrico
III	$(x_1 < 0 < x_2) \wedge (\lvert x_1\rvert > x_2)$	intervalo assimétrico negativo
BIII	$x_1 < x_2 = 0$	intervalo não positivo
IV	$x_1 \leq x_2 < 0$	intervalo estritamente negativo

Para a realização da operação de multiplicação seguindo os critérios de Vaccaro, faz-se necessário uma avaliação sobre cada intervalo. O modo como a operação deve ser realizada também difere de acordo com as regiões a que os intervalos pertencem, o que pode ser consultado na literatura.

2.4 Multiplicação Intervalar da Aritmética Multidimensional RDM

A aritmética intervalar multidimensional RDM (*Relative Distance Measure* ou Medida da Distância Relativa) é assim denominada por introduzir a ideia de um parâmetro de incerteza à dimensão do problema, o que é feito por meio de uma variável, chamada variável RDM, caracterizada por α (alpha).

De forma semelhante à multiplicação definida por Moore, com os procedimentos de mínimo e máximo. Porém, é necesário considerar a variável RDM ao cálculo:

$$[x_1,x_2] \times [y_1,y_2] = x_1 + \alpha_x(x_2 - x_1) \times y_1 + \alpha_y(y_2 - y_1); \alpha_x, \alpha_y \in [0,1]$$

A principal proposta de tal aritmética é considerar todos os valores entre os limites do intervalo, não somente as bordas do intervalo. A partir dessa definição, o intervalo [5, 7] pode ser expresso utilizando a notação RDM como: $x = 5 + 2\alpha_x$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma vez conhecidas as definições das aritméticas consideradas neste trabalho, um intervalo foi atribuído à variável A das equações (1), (2) e (3) para a computação dos cálculos: $[0, \sqrt{2}]$.

A computação com intervalos fornece métricas de análise qualitativa, tais como Erro Absoluto (EA), Erro Relativo (ER) e Diâmetro (W). Devido aos intervalos solução obtidos conterem o valor zero, não foi possível realizar o cálculo da métrica de erro relativo para todos os resultados. Os valores de Diâmetro e Erro Absoluto foram calculados conforme equações (4) e (5), respectivamente.

$$w([x_1,x_2]) = x_2 - x_1 \tag{4}$$

$$EA = |x - m([x_1,x_2])| < \frac{w([x_1,x_2])}{2}; \; m([x_1,x_2]) = \frac{x_2 - x_1}{2} \tag{5}$$

A seguir, a Tabela 1 apresenta os resultados intervalares obtidos a partir da computação das equações (1), (2) e (3). Juntamente, apresentam-se os valores de diâmetro e erro absoluto dos intervalos.

Tabela 1. Intervalo solução, diâmetro e erro absoluto para A = $[0, \sqrt{2}]$

Aritmética	Equação	Intervalo solução	w(x)	EA
Moore	(1)	[-2.0, 1.414]	3.41	0 < 1.7
	(2)	[-0.585, 1.414]	1.9	0 < 0.9
	(3)	[-2.0, 2.828]	4.8	0 < 2.4
Vaccaro	(1)	[-2.0, 1.414]	3.41	0 < 1.7
	(2)	[-0.585, 1.414]	1.9	0 < 0.9
	(3)	[-2.0, 2.828]	4.8	0 < 2.4
RDM	(1) (2) (3)	[-0.585, 0.249]	0.83	0 < 0.41
Kaucher	(1)	[-2.0, 1.414]	3.41	0 < 1.7
	(2)	[-0.585, 1.414]	1.9	0 < 0.9
	(3)	[-2.0, 2.828]	4.8	0 < 2.4

Na Tabela 1, para o resultado intervalar RDM, os valores aplicados a α foram: α = 1 e α = 0.35, utilizou-se uma precisão de 10^{-4} para essa variável.

A equidade nos intervalos solução utilizando os métodos de produto intervalar de Moore, Kaucher e Vaccaro era esperado, uma vez que a multiplicação definida por Vaccaro estende o produto intervalar clássico, introduzindo apenas a lógica de regiões para o cálculo. Quanto à aritmética de Kaucher o mesmo ocorre, pois, para este cálculo, não ocorreram intervalos impróprios.

Entretanto, a aritmética RDM apresenta estruturas de resolução diferentes. Podendo ser observado a igualdade da solução para as diferentes formas da equação calculada.

Com a análise da métrica de erro absoluto, verifica-se que em todos os casos a desigualdade é satisfeita, demonstrando qualidade nos resultados obtidos. Além disso, obteve-se também os menores valores de diâmetro e erro absoluto ao utilizar a aritmética RDM. Indicando, assim, uma melhor qualidade de resultados para a aritmética multidimencional RDM.

4. CONCLUSÕES

A aritmética intervalar gera resultados com garantia de sua incerteza, pois os erros gerados estão contidos no intervalo solução.

O objetivo deste trabalho foi apresentar quatro diferentes processos de multiplicação intervalar: Moore, Kaucher, Vaccaro e RDM e realizar a análise de qualidade dos resultados intervalares obtidos.

A análise numérica, não demonstrou diferenças em relação aos métodos de Moore, Kaucher e Vaccaro. Diferentemente, RDM possui uma definição particular ao inserir a variável alpha, apresentando os mesmos resultados para o cálculo das três diferentes equações, mostrando um indicativo de maior confiabilidade no processo em comparação aos demais. Adicionalmente, os valores de erro e diâmetro apresentaram indicativos de qualidade.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KAUCHER, E. Interval analysis in the extended interval space IR. **Fundamentals of Numerical Computation** (Computer-Oriented Numerical Analysis). Springer Vienna, p. 33-49. 1980.

LORKOWSKI, J. and VLADIK, K. How Much For an Interval? a Set? a Twin Set? a p-Box? A Kaucher Interval? Towards an Economics-Motivated Approach to Decision Making Under Uncertainty. **International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics**. Springer International Publishing, 2015.

MOORE, R. E., KEARFOTT, R. B. and CLOUD, M. J. Introduction to Interval Analysis. Siam. Philadelphia, 2009.

PIEGAT, A. and LANDOWSKI, M. Two Interpretations of Multidimensional RDM Interval Arithmetic – Multiplication and Division. **International Journal of Fuzzy Systems.** v. 15, n. 4, p. 486-496, 2013.

VACCARO, G. L. R. **Solução de Equações Intervalares.** 2001**.** Tese (Doutorado). Instituto de Informática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Porto Alegre.