

## OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA SIMULTÂNEA À DISTRIBUIÇÃO DE ATUADORES PIEZOELÉTRICOS

JONATHAN BRUM LAUZ<sup>1</sup>; ALEXANDRE MOLTER<sup>2</sup>;

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – jonathan.brum.lauz@hotmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas – alexandre.molter@yahoo.com.br

### 1. INTRODUÇÃO

Projetos de estruturas, otimizadas e controladas, são de grande importância na indústria para fabricação de materiais, mais leves e de menor custo. Tendo isto em vista, se pretende considerar um problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos. Objetiva-se incluir a distribuição de atuadores num projeto de otimização topológica, em estruturas.

O uso eficiente dos materiais é importante em diversos contextos. Citam-se os exemplos apontados por Bendsøe e Sigmund (2003), onde afirmam que as indústrias aeroespacial e automotiva aplicam dimensionamento e otimização da forma ao projeto de estruturas e elementos mecânicos, e que a otimização da forma é também utilizada no projeto de dispositivos eletromagnéticos, eletroquímicos e acústicos.

Para este trabalho, se irá discretizar o domínio do problema por elementos finitos e se utilizará a metodologia do Critério Ótimo (OC - Optimality Criteria) (BENDSØE; SIGMUND, 2003) no processo de otimização. O objetivo deste trabalho é encontrar a topologia ótima e melhor distribuição de atuadores em estruturas.

A discretização do modelo matemático é feita pelo Método dos Elementos Finitos. No método da otimização topológica aborda-se o modelo material, o método das densidades e o problema de mínima flexibilidade. Para mostrar a eficiência da metodologia proposta neste trabalho, na otimização estrutural, serão apresentados alguns resultados obtidos por meio de simulações numéricas.

### 2. METODOLOGIA

Na discretização a ser apresentada, assume-se a hipótese do estado plano de tensões mecânicas, permitindo o tratamento bidimensional do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos.

O problema de otimização discretizado é dado por

$$\begin{aligned} \min \quad & J(u, \varphi, \rho_u, \rho_\varphi) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\varphi} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K}_{\varphi u} \mathbf{U} - \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varphi} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}_u, \quad \mathbf{K}_{\varphi u} \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{Q}_\varphi, \\ & \sum_e \rho_{u_e} V_{u_e} = \eta_u V, \quad \sum_e \rho_{\varphi_e} V_{\varphi_e} = \eta_\varphi V, \\ & 0 < \rho_{u_{e\min}} \leq \rho_{u_e} \leq 1, \quad 0 < \rho_{\varphi_{e\min}} \leq \rho_{\varphi_e} \leq 1, \\ & e = 1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (1)$$

Onde  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{u\varphi}$  e  $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$  são as matrizes globais de rigidez, de acoplamento piezoelétrico e de capacitância elétrica, respectivamente;  $\mathbf{K}_{\varphi u}$  é a matriz  $\mathbf{K}_{u\varphi}$  transposta;  $\mathbf{U}$  é a deflexão global;  $\boldsymbol{\varphi}$  é vetor global de potenciais elétricos;  $\mathbf{F}_u$  é o vetor global de forças;  $\mathbf{Q}_\varphi$  é o vetor global de cargas elétricas e  $\rho_{u_e}$  e  $\rho_{\varphi_e}$  são as densidades de cada elemento dos materiais e  $e$  é o índice elemental.

Para solucionar o problema (1) é utilizado uma abordagem do OC correspondente a um método heurístico, baseado na função Lagrangeana (SHUKLA; MISRA, 2013), que tem por finalidade atualizar as variáveis de projeto do problema, onde cada variável é atualizada de forma independente da atualização das outras (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Se irá considerar para o problema, o caso da interpolação das densidades pela abordagem SIMP (ou método das densidades), onde modelo das propriedades dos materiais elástico e piezoelétrico são dados de Carbonari, Silva e Nishiwaki (2007) que definem as combinações dos materiais.

Na busca por soluções, objetiva-se, portanto, obter duas respostas: a topologia ótima condizente com as restrições de suporte e de carregamento mecânicos e elétricos e a melhor localização para atuadores nesta topologia.

Então se enuncia o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (1)

$$\mathcal{L}(\rho_u, \rho_\varphi) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\varphi} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K}_{\varphi u} \mathbf{U} - \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varphi} + \Lambda_1^T (\mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{F}_u) + \Lambda_2^T (\mathbf{K}_{\varphi u} \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{Q}_\varphi) + \lambda_0 (\sum_e \rho_{u_e} V_{u_e} - \eta_u V) + \lambda_1 (\sum_e \rho_{\varphi_e} V_{\varphi_e} - \eta_\varphi V), \quad (2)$$

calcula-se as derivadas com respeito às variáveis de  $\rho_u$  e  $\rho_\varphi$  e, afim de eliminar as derivadas  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_u}$  e  $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \rho_u}$  utiliza-se o fato de  $\Lambda_1^T$  e  $\Lambda_2^T$  serem arbitrários, podendo substituí-los por  $-2\mathbf{U}^T$  e  $-2\boldsymbol{\varphi}^T$  respectivamente, assim, com algumas simplificações obtém-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_u} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} - 2\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\varphi}}{\partial \rho_u} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\varphi\varphi}}{\partial \rho_u} \boldsymbol{\varphi} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \rho_u} [\sum_e \rho_{u_e} V_{u_e}]. \quad (3)$$

Utilizando o modelo material com as penalizações de Carbonari, Silva e Nishiwaki (2007) e as condições estacionárias para  $\rho_u$  na equação (18) em sua forma discretizada tem-se:

$$\begin{aligned} -p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1} ((\rho_{\varphi_e})^{p_2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{u\varphi u}^e \mathbf{u}^e + (1 - (\rho_{\varphi_e})^{p_2}) \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{uuu}^e \mathbf{u}^e) \\ - 2p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\varphi_e})^{p_3} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{u\varphi}^e \boldsymbol{\varphi}^e + p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\varphi_e})^{p_3} \boldsymbol{\varphi}^{eT} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e \boldsymbol{\varphi}^e \\ + \lambda_0 V_{u_e} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

onde as constantes  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são expoentes de penalização vindos do modelo SIMP, e ao considerar,

$$\begin{aligned} q_{u_e} = -p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1} ((\rho_{\varphi_e})^{p_2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{u\varphi u}^e \mathbf{u}^e + (1 - (\rho_{\varphi_e})^{p_2}) \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{uuu}^e \mathbf{u}^e) \\ - 2p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\varphi_e})^{p_3} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{u\varphi}^e \boldsymbol{\varphi}^e + p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\varphi_e})^{p_3} \boldsymbol{\varphi}^{eT} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^e \boldsymbol{\varphi}^e, \end{aligned} \quad (5)$$

então a forma (4) pode ser escrita como

$$\frac{q_{u_e}}{\lambda_0 V_{u_e}} = 1 \quad (6)$$

e de forma similar ao que se chega em (3), utiliza-se as condições estacionárias para  $\rho_\varphi$  na equação em sua forma discretizada e tem-se:

$$\frac{q_{\varphi_e}}{\lambda_1 V_{\varphi_e}} = 1. \quad (7)$$

As equações (6) e (7) tem sentido físico que representam a densidade de energia de deformação que deve ser constante ao longo do domínio do projeto. Então, os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  são atualizados de forma a deixar as energias de deformação constantes. Utiliza-se um esquema heurístico de atualização para as variáveis:

$$\rho_{u_e}^{new} = \rho_{u_e} \left( \frac{q_{u_e}}{\lambda_0 V_{u_e}} \right)^\zeta = \rho_{u_e} (B_{u_e})^\zeta \text{ e } \rho_{\varphi_e}^{new} = \rho_{\varphi_e} \left( \frac{q_{\varphi_e}}{\lambda_0 V_{\varphi_e}} \right)^\zeta = \rho_{\varphi_e} (B_{\varphi_e})^\zeta \quad (8)$$

onde  $\zeta$  é um coeficiente de amortecimento que é geralmente considerado 0.5 podendo variar de 0 a 1. Onde este amortecimento estabiliza as iterações. Na iteração, quando o elemento passa de vazio para sólido introduzimos um limite de movimento da variável de projeto. Para atualizar cada variável é utilizado o esquema de atualização de Bendsøe e Sigmund (2003).

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

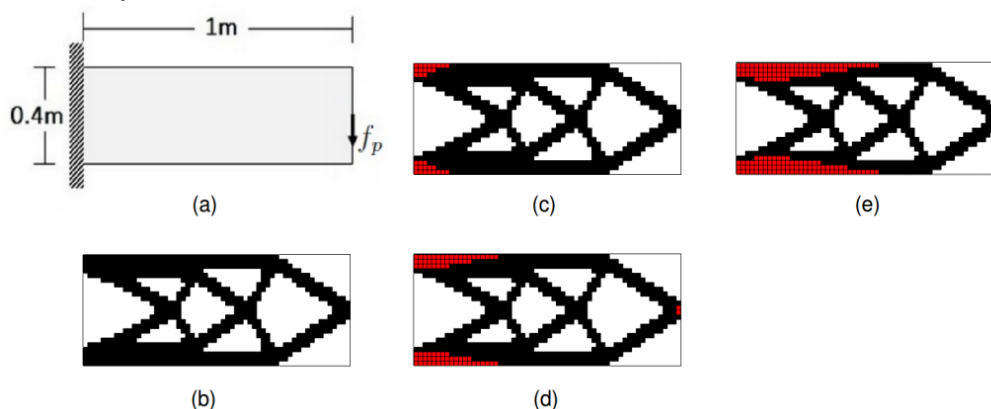
Foram realizadas simulações computacionais utilizando o software *MATLAB* e como base o programa de otimização estrutural dado no trabalho de Sigmund (2001). A estrutura utilizada para as simulações foi uma viga de 0,4 m de altura (no eixo  $y$ ) e 1 m de comprimento (no eixo  $x$ ).

É apresentado para verificar o desempenho da proposta de projeto simultâneo descrita neste trabalho, uma malha de 1440 (60 x 24) elementos finitos bilineares, cada elemento finito isoparamétrico tem quatro nós, dois graus de liberdade mecânicos e um grau de liberdade elétrico por nó.

Para estes problemas, consideram-se dois materiais específicos: o alumínio, material considerado elástico e isotrópico que está relacionado à variável de projeto  $\rho_u$  e a cerâmica PZT5A como material piezoelétrico, relacionado à variável de projeto  $\rho_\varphi$ .

Para a simulação considerou-se uma viga em balanço sujeita a carga pontual  $f_p$  no meio (esquema da Figura 1(a)) da sua extremidade livre de força  $f_p = -1 \times 10^{11} N$ .

Para obter a melhor localização para atuadores na estrutura, considerou-se diferentes valores para  $\eta_\varphi$ . A Figura 1(c) foi gerada com  $\eta_\varphi = 0,01$ ,  $\eta_\varphi = 0,02$ ,  $\eta_\varphi = 0,1$ , que corresponde a 1%, 2% e 10% de material piezoelétrico na estrutura, respectivamente.



**Figura 1** (a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade  $\rho_u$  para  $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade  $\rho_\varphi$  (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c)  $\eta_\varphi = 0,02$ , (d)  $\eta_\varphi = 0,05$  e (e)  $\eta_\varphi = 0,1$ .

O processo de otimização indicou três regiões para atuadores, conforme mostra a Figura 1(d), próximas aos engastes e às extremidades da viga e de uma região coincidente com o local de aplicação da força  $f_p$ .

#### 4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, mediante a otimização topológica, buscou-se uma metodologia para melhor distribuição dos materiais piezoelétricos nas estruturas. Utilizou-se o Método de Elementos Finitos na discretização do problema. As condições de estacionariedade foram obtidas a partir do problema discreto.

Como parte inovadora deste trabalho, estendeu-se a metodologia OC para critério de otimalidade, também da parte do material piezoelétrico. Perceberam-se problemas na implementação computacional da metodologia proposta, que foram resolvidos mediante pequenas alterações no algoritmo do OC.

Para ilustrar a metodologia proposta foi apresentado simulações numéricas do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos. Obteve-se resultados compatíveis com os apresentados em outros trabalhos, como os de Donoso, Sigmund, 2008; Molter, Fernandez e Fonseca 2016, onde foram utilizadas outras técnicas de otimização. Pela comparação com outros trabalhos percebeu-se que a metodologia adotada neste trabalho foi eficiente.

#### 5. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece a CAPES pelo apoio financeiro.

#### 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENDSØE M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization - theory, methods and applications**. 2. ed. Berlim: Springer, 2003.

CARBONARI, R. C.; SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S. Optimum placement of piezoelectric material in piezoactuator design. **Smart Materials and Structures**, v.16, p.207–220, 2007

DONOSO, A.; SIGMUND, O. Optimization of piezoelectric bimorph actuators with active damping for static and dynamic loads. **Struct Multidisc Optim**. Vol 38, p.171,2008.

MOLTER, A; FONSECA, J.S.O.; FERNANDEZ, L.S. Simultaneous topology optimization of structure and piezoelectric actuators distribution. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 9, p. 5576-5588, 2016.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural Multidisciplinary Optimization**, v.21, p.120–127, 2001.

SHUKLA, A.; MISRA, A. Review of Optimality Criterion Approach Scope, Limitation and Development in Topology Optimization. **International Journal of Advances in Engineering & Technology**, v. 6, n. 4, p. 1886, 2013.

QI, H.; FANG, D.; YAO, Z. FEM analysis of electro-mechanical coupling effect of piezoelectric materials. **Computational materials science**, v. 8, n. 4, p. 283-290, 1997.