UM ESTUDO SOBRE O CONJUNTO DE CANTOR

JONATHAN R. DA COSTA[1]; MAURÍCIO ZAHN[2]

[1]Universidade Federal de Pelotas – jonyjo2009@hotmail.com

[2]Universidade Federal de Pelotas – mauricio.zahn@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Dizemos que dois conjuntos X e Y não vazios são equivalentes e escrevemos $X \sim Y$, quando existir $f: X \to Y$ bijetiva. Dessa forma os conjuntos X e Y estão numa mesma *classe* e, portanto, dizemos que possuem a mesma *cardinalidade*, e denotamos card (X) = card (Y).

Em um artigo de TARSKI (1924) é introduzido o conceito de número cardinal através de dois axiomas:

1. *Todo conjunto está associado com um objeto que é seu número cardinal.*
2. *Dois conjuntos são equivalentes se, e somente se, possuírem o mesmo número cardinal correspondente a eles.*

Quando X for um conjunto finito, o conceito de cardinalidade corresponde à quantidade de elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto $X = \{1,2,3,4,5\}$ possui cardinalidade 5 e denotamos card (X) = 5. Do mesmo modo o conjunto $Y = \{2,4,8,16,32\}$ possui também cardinalidade 5 e, dessa forma, ambos estão numa mesma classe, a classe dos conjuntos de cardinalidade 5.

Dizemos que um conjunto infinito X é enumerável se ele estiver na mesma classe do conjunto dos números naturais. Ou seja, um conjunto X infinito é enumerável se existir $f: X \to \mathbb{N}$ bijeção.

Georg Cantor (1845-1918) denotou a classe dos conjuntos enumeráveis pela letra $\aleph_0$ (Aleph-Zero). Ou seja, card ($\mathbb{N}$) = $\aleph_0$. Em SIERPINSKI (1965) mostra-se que: card ($\mathbb{Z}$) = card (Q) = card ($\mathbb{N}$) = $\aleph_0$.

Um conjunto infinito X é não enumerável quando não existir uma bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Cantor usou um método para demonstrar como o conjunto dos reais é não enumerável, chamado de *método da diagonal de Cantor*. Tal prova é feita por absurdo, supondo que intervalo (0,1) seja enumerável. Cantor designou pela letra *c* a classe dos conjuntos equivalentes ao conjunto *R* dos números reais, ou seja, se $X \sim \mathbb{R}$ então, Cantor denotou

$$\text{card}\,(X) = \text{card}\,(\mathbb{R}) = c.$$

Outros exemplos de conjuntos que possuem cardinalidade *c* são o conjunto dos números irracionais e o conjunto *C* de Cantor que apresentaremos na Seção 3, objeto de estudo desse trabalho.

2. METODOLOGIA

O seguinte trabalho foi realizado por meio de pesquisas em livros e artigos científicos, através de encontros com o orientador, realizados semanalmente. Buscamos construir um embasamento teórico para estudar o Conjunto de Cantor. Desse modo, foi descrito no trabalho o que seria necessário para provar que a cardinalidade do referido conjunto é o *continuum c*.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

No que segue descreveremos a construção de um conjunto especial, definido por *Conjunto de Cantor C*. Denotemos C_0= [0,1]. Retirando o intervalo central aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, de comprimento $\frac{1}{3}$, obtemos o conjunto $C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$. De cada um dos dois subintervalos de C_1, retiramos seus intervalos centrais abertos de comprimento $\frac{1}{3^2}$ e obtemos o conjunto C_2, e assim continuamos indefinidamente. Ou seja, determinamos os conjuntos.

- $C_0 = [0,1]$, formado por $2^0 = 1$ intervalo fechado;
- $C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$, formado por $2^1 = 2$ intervalos fechados;
- $C_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$, formado por $2^2 = 4$ intervalos fechados;
- $C_3 = [0,\frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27},\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},\frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27},1]$, formado por $2^3 = 8$ intervalos fechados;

e continuamos este processo indefinidamente. No passo *n*, teremos o conjunto C_n formado por 2^n intervalos fechados. Abaixo, temos uma ilustração dos primeiros conjuntos C_n, onde o primeiro segmento está representando o intervalo [0,1].

Observe que cada C_n é não vazio, pois na sua construção, as extremidades do conjunto C_{n-1} permanecem e, recursivamente, este também é não vazio, pois contém as extremidades dos subintervalos de C_{n-2}, e assim por diante.

Temos, assim, uma sequência de conjuntos $(C_n)_n$, tal que

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \ldots$$

Definimos assim:

Definição 1. Com as notações acima, o *conjunto de Cantor C* é definido por

$$\mathrm{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap \cdot \cdot \cdot$$

formado pela intersecção de todos os C_n.

Observe que o conjunto de Cantor *C* é não vazio, pois conforme observamos acima, em cada etapa de construção dos C_n, as extremidades dos intervalos fechados sempre permanecem, portanto, permanecerão em *C*.

Lema 2. *Seja* $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \,.\, 3^{-i}$ *a expansão em base 3 de um número x ∈ [0, 1]. Então, x ∈ C se, e somente se,* a_n *∈ {0, 2}, ∀ n ∈ ℕ.*

Observe que o lema acima nos ajuda a dar uma definição mais algébrica para o conjunto de Cantor, sem usar o recurso de construção geométrica que utilizamos para chegar à definição 1:

Definição 3. O conjunto de Cantor *C* é definido por

$$C = \{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, 3^{-n} : a_n = 0 \text{ ou } a_n = 2\}.$$

De acordo com o Lema 2 mostra-se que as definições 1 e 3 são equivalentes.

O Lema 2 também ajuda na prova do seguinte resultado.

Proposição 4. *O conjunto de Cantor C é não enumerável.*

Por fim, com base nos resultados acima obtidos, provamos a Proposição abaixo, o principal resultado de nosso trabalho:

Proposição 5. *A cardinalidade do conjunto de Cantor C é o continuum c, ou seja, card C = c.*

4. CONCLUSÕES

De nosso estudo notamos uma conclusão que é "chocante" num certo sentido: provamos que a cardinalidade do conjunto de Cantor *C* é o *continuum c*, a mesma cardinalidade do intervalo [0,1], muito embora *C* seja obtido a partir de infinitas extrações de subintervalos de [0,1], todos de cardinalidade também *c*. O conjunto *C* visualmente parece ser uma "poeira", e mesmo assim, ele ainda tem cardinalidade igual à do intervalo [0,1] original, ou seja, o *conjunto de Cantor C* e o intervalo [0,1] estão numa mesma classe de equivalência.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

TARSKI, A., *Sur quelques théorèmes qui equivalente à l'axiome du choix.* Fund. Math 5(1924), p. 147-154.

SIERPINSKI, Waclaw. Cardinal and ordinal numbers. 2nd. Ed. Polish Scienti c Publishers -Tom 34, Warszawa, 1965.

ZAHN, M. Uma introdução aos cardinais de Cantor, editora Ciência Moderna, RJ 2016.