A PARAMETRIZAÇÃO DA LIMAÇON

FREDERICO DA ROSA BLANK[1]; LISANDRA DE OLIVEIRA SAUER[2]

[1]Universidade Federal de Pelotas – blank.frederico@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – lisandra.sauer@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Ao longo do estudo do cálculo integral-diferencial o estudante de matemática (e dos cursos que se utilizam dela como ferramenta) têm contato com vários tipos diferentes de funções, gráficos e estruturas matemáticas. Dentre os conteúdos trabalhados está o estudo das curvas no plano, tanto de maneira cartesiana quanto em sua forma polar.

Em certo ponto (no curso de matemática visto na cadeira de Cálculo III) é apresentado o sistema de coordenadas polares, que se utiliza da distância de ponto à origem e o ângulo formado entre o segmento origem-ponto e o eixo das abscissas para determinar sua posição no plano (STEWART, 2014). Mais especificamente, é tratado o estudo das curvas polares, como circunferências, lemniscatas e limaçons, essa sendo o objeto de estudo deste trabalho.

Entretanto, não é foco das disciplinas de cálculo estudar de maneira aprofundada estas curvas, então são apenas apresentadas as equações gerais e já se parte para o cálculo de áreas através de integrais duplas.

Neste trabalho será apresentada uma definição de Limaçon utilizando-se das ferramentas da Geometria Diferencial (CARMO, 1971; TENEMBLAT, 2008) e do estudo de curvas chamadas Conchoides (HOFFMAN, 2008) para então chegar à parametrização e comparar com a forma como foi tratada na disciplina de Cálculo.

2. METODOLOGIA

Este trabalho foi realizado através de revisão bibliográfica sobre a Limaçon (STEWART, 2014) em suas diferentes formas. Posteriormente, revisão bibliográfica sobre Geometria Diferencial (CARMO, 1971; TENEMBLAT, 2008) para aprofundamento do estudo de curvas no plano e, então, estudo das Conchoides (HOFFMAN, 2008) para então se chegar de fato na parametrização polar da Limaçon.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 A LIMAÇON

Dada pelas equações gerais $r(\theta) = a\cos(\theta) + b$ ou $r(\theta) = a\sin(\theta) + b$; onde $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ (STEWART, 2014), a Limaçon é uma curva plana tratada ao longo das cadeiras de Cálculo no estudo de coordenadas polares.

Diferentes Limaçons podem ser obtidas em função dos valores de a e b, podendo ou não haver auto-interseção no seu traço.

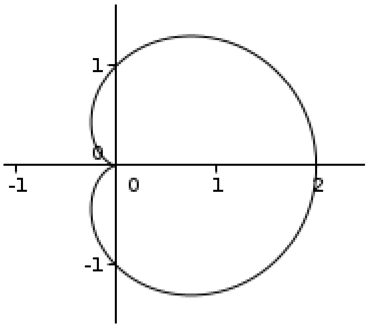

Figura 1: Cardióide (Tipo de Limaçon) de Equação $r(\theta) = \cos(\theta) + 1$

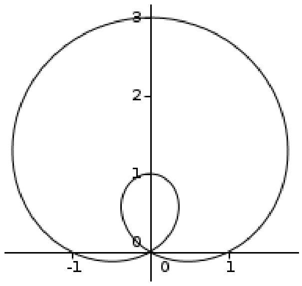

Figura 2: Limaçon de Equação $r(\theta) = 2\sin(\theta) - 1$

3.2 ESTUDO DA GEOMETRIA DIFERENCIAL NO PLANO

Como o objeto de estudo é uma curva, deve-se primeiro definir o que é uma curva.

Definição 1: Dado um intervalo aberto $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, definimos curva plana como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{I} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais de classe C^k, $k \geq 2$, ou seja, $\exists\ x''(t), y''(t)$ pelo menos. Dizemos que a curva está parametrizada por $t \in \mathcal{I}$ e chamamos sua representação gráfica de traço da curva. (TENEMBLAT, 2008)

À partir da definição, podemos observar algumas particularidades das curvas. Por definição, como $x(t)$ e $y(t)$ são C^k, $k \geq 2$, dizemos que a curva é contínua $\forall\ t \in \mathcal{I}$ e suave se $\exists\ \alpha'(t),\ \alpha'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ $\forall\ t \in \mathcal{I}$ (vetor tangente à curva). Mais do que isso, dizemos que uma curva é regular se $\alpha'(t) \neq \vec{0}\ \forall\ t \in \mathcal{I}$. Se, fixado $t = t_0$, temos que $\nexists\ \alpha'(t_0)$ ou $\alpha'(t_0) = \vec{0}$ então a curva possui uma cúspide em t_0, que se manifesta como um "bico" no seu traço (CARMO, 2008).

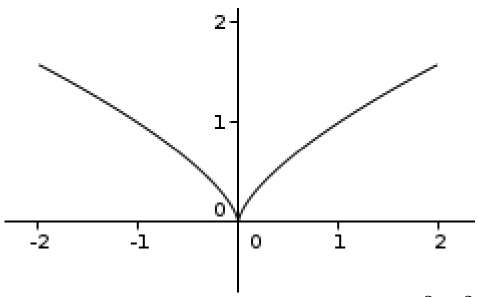

Figura 3: Cúspide no Traço de $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ em $t = 0$

Tendo a definição de curva, podemos observar características interessantes acerca das curvas.

Definição 2: Uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco (p.c.a.) se, dado um intervalo $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ difeomorfo a $\mathcal{I}$, $|\alpha'(s)| = 1 \ \forall \ s \in \mathcal{J}, \ s = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(u)|du$ onde s é uma função diferenciável com inversa diferenciável e $\int_{t_0}^{t} |\alpha'(u)|du$ é a função comprimento de arco da curva à partir de um valor fixo t_0 até um valor $t \in \mathcal{I}$. (TENEMBLAT, 2008)

Disto definimos um vetor tangente unitário $t(s) = \alpha'(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ onde seu sentido determina a orientação da curva. Além disso, aplicando uma rotação de 90° no sentido positivo trigonométrico em $t(s)$ obtemos um vetor normal também unitário (já que apenas a direção do vetor é alterada) dado por $n(s) = \left(-\frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}\right)$. (TENEMBLAT, 2008)

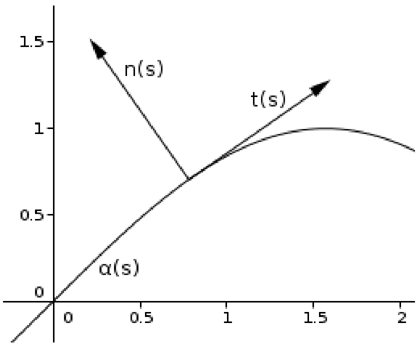

Figura 4: Representação dos vetores Tangente e Normal no traço de uma curva em um ponto qualquer

Através da definição (2) é possível partir para o conceito de curvatura de curva, que representa o quanto uma curva se afasta de uma reta.

Definição 3: Dado $\alpha(s)$ p.c.a., a curvatura $k(s)$ é a função real dada por $k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle \ \forall \ s \in \mathcal{J}$ onde $t'(s) = \alpha''(s)$. (TENEMBLAT, 2008)

Note que, pela definição anterior, precisamos que a curva esteja p.c.a. para poder calcular a curvatura. Porém a função comprimento de arco que define o parâmetro s pode ser de difícil solução ou mesmo não apresentar solução analítica. Para tanto, a curvatura $k(t)$ para curvas não p.c.a é dada por

$$k(t) = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{\left(\sqrt{(x'(t))^2 (y'(t))^2}\right)^3}$$

onde $t \in \mathcal{I}$ (TENEMBLAT, 2008).

Teorema 1: Dado $k(t)$ de uma curva qualquer $\alpha(t)$ sempre é possível saber a natureza da curva a menos de translação. Fixado um ponto $P(x_0, y_0)$, é possível conhecer exatamente $\alpha(t)$. Este é chamado o Teorema Fundamental das Curvas Planas. (TENEMBLAT, 2008)

Tendo um pouco mais aprofundado o estudo de curvas, parte-se então para o estudo de um tipo específico de curva, chamada conchoide.

3.3 ESTUDO DAS CONCHOIDES

Nicomedes (280 AEC – 210 AEC) foi um matemática Grego que, assim como seus contemporâneos, buscava a solução da quadratura do círculo e a trisseção do ângulo agudo, ambos problemas que hoje sabemos de impossível solução através da geometria clássica. Através de seus estudos, Nicomedes criou a Conchoide de Nicomedes, uma curva gerada à partir do afastamento em k unidades de uma reta λ no sentido oposto a um ponto fixo P chamado pólo. (HOFFMAN, 2008).

Desta forma, tomando uma reta na forma polar $\lambda = \rho(\theta)$, temos que a conchoide $r(\theta)$ pode ser dada por $r(\theta) = \rho(\theta) + k$ conforme o ângulo θ varia. Note que isto permite que existam dois ramos na conchoide, um no intervalo $0 < \theta < \pi$ e outro no intervalo $\pi < \theta < 2\pi$. Além disso, é possível generalizar esta definição tomando uma curva qualquer e um polo qualquer no plano. Assim, temos a equação $r(\theta) = \rho(\theta) + k$ onde $\rho(\theta)$ é uma curva polar qualquer e k uma constante real, com polo na origem do plano polar para simplificar o tratamento matemático.

3.4 A PARAMETRIZAÇÃO DA LIMAÇON

Tomando circunferências polares na forma $\rho(\theta) = a\cos(\theta)$ ou $\rho(\theta) = a\sin(\theta)$, $a \in \mathbb{R}^*$, é possível observar que se for adicionada uma constante $b \in \mathbb{R}^*$ obtemos exatamente a equação geral da Limaçon. Desta forma, a Limaçon então é definida como a conchoide de uma circunferência no plano polar.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho me proporcionou explorar a geometria diferencial de modo a entender a relação entre uma curva e seu traço. Além disso, pude de fato entender o que é uma Limaçon e como sua equação se origina. A continuação deste trabalho será estudar se é possível construir este tipo de curva, a Limaçon, através da definição pela conchoide da circunferência, no modelo da geometria elíptica e/ou sobre o plano hiperbólico.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARMO, Manfredo P. do. **Elementos de Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: IMPA, 1971.

TENEMBLAT, Keti. **Introdução a geometria diferencial.** 2ª ed. rev. São Paulo: Blucher, 2008.

STEWART, James. **Cálculo vol. 2**. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

HOFFMAN, Antonio Remi Kieling. **Curvas mecânicas: a conchóide.** 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade de Campinas.

As imagens utilizadas neste trabalho foram de autoria própria utilizando o software Geogebra.