ÍNDICE FUZZY INTUICIONISTA GENERALIZADO CONJUGADO COM S-IMPLICAÇÕES

LIDIANE COSTA DA SILVA[1]; RENATA REISER[1]; ADENAUER YAMIN[1]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – {lcdsilva, reiser, adenauer}@inf.ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Na intenção de modelar a incerteza de informações disponíveis em sistemas de raciocínio, a abordagem fuzzy intuicionista no sentido de Atanassov permite que sejam associados a cada elemento de um cojunto fuzzy intuicionista, um grau de pertinência e um grau de não pertinência, que não são necessariamente complementares. A relação flexível entre esses graus não complementares é expressa formalmente como o Índice Fuzzy Intuicionista de Atanassov (*A-IFIx*), também chamado grau de hesitação.

Em determinadas aplicações, o especialista não têm um conhecimento preciso das informações. Nestes casos o *A-IFIx* formaliza através de uma expressão, as incertezas ou falta de informações para a identificação de um elemento particular em um conjunto com base em lógica fuzzy intuicionista de Atanassov (*A-IFL*).

Existem diversas aplicações de A-IFIx em regras de modelagem e inferência no raciocínio fuzzy, mas em BARRENECHEA et al. (2009) é proposto um novo conceito, o Índice Fuzzy Intuicionista Generalizado de Atanassov (*A-GIFIx*) que é caracterizado em termos de operações de implicação fuzzy, e descrito por meio de automorfismos. Em BUSTINCE et al. (2011), o *A-GIFIx* é aplicado a funções de agregação especiais, gerando a entropia fuzzy intuitionista de Atanassov que é discutida e alguns exemplos são analisados.

O objetivo principal desta etapa da pesquisa é a extenção dos estudos anteriores das propriedades relacionadas ao *A-GIFIx*, visando a geração de novos conectivos a partir do conceito de implicações fuzzy conjugadas, principalmente a classe de S-implicações e suas construções duais. Para tal, consideramos a negação padrão aplicada à implicações fuzzy conhecidas, como: R_0, Lukaziewicz, Reichenbach, Gaines-Rescher e I_{30} (LIN; XI, 2006).

2. METODOLOGIA

Com a realização do levantamento bibliográfico de estudos preliminares que fundamentam a *A-IFL*, as propriedades básicas das implicações fuzzy, a negação padrão e conceitos básicos de automorfismos foram revisados, tendo em vista a aplicação do *A-GIFIx* conjugado a S-implicações. Neste estudo, consideramos o intervalo unitário $U = [0,1]$.

De acordo com a Definição 4.1, veja KLEMENTE; NAVARA (1999), um automorfismo $\varphi: U \to U$ é uma função bijetora e estritamente crescente

A_1: $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y), \forall x, y \in U.$

Conforme BUSTINCE (2003) um automorfismo $\varphi: U \to U$ é uma função contínua, estritamente crescente, tal que

A_2: $\varphi(0)=0$ e $\varphi(1)=1$.

Seja $Aut(U)$ o conjunto de todos os automorfismos. As operações de composição e reversão são fechadas em Aut(U):

A_3: $\varphi \circ \varphi' \in Aut(U), \forall \varphi, \varphi' \in Aut(U)$; e

A_4: $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_U, \forall \varphi, \varphi^{-1} \in Aut(U)$.

Uma função $f^{\varphi}: U^n \to U$ é chamada **conjugada de *f*** $: U^n \to U$, e é dada pela expressão:

$$\boldsymbol{f^{\varphi}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}(f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)))}$$

Uma função $N: U \to U$ é uma negação fuzzy (FN) se verifica as propriedades:

$\mathbf{N_1}$: $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$; e $\quad$ $\mathbf{N_2}$: Se $x \geq y$ então $N(x) \leq N(y)$, $\forall x, y \in U$

Uma *FN* é chamada de negações fuzzy forte (*SFNs*) (BUSTINCE, 2003) se verifica $\mathbf{N_3}$: $N(N(x)) = x$, $\forall x \in U$.

FODOR; ROUBENS (1994) introduzem a definição de implicação fuzzy $I: U^2 \to U$, sempre que as condições a seguir são satisfeitas:

$\mathbf{I_1}$: Se $x \leq z$ então $I(x,y) \geq I(z,y)$; $\quad$ $\mathbf{I_2}$: Se $y \leq z$ então $I(x,y) \leq I(x,z)$;
$\mathbf{I_3}$: $I(0, y) = 1$; $\quad$ $\mathbf{I_4}$: $I(x, 1) = 1$;
$\mathbf{I_5}$: $I(1, 0) = 0$; $\quad$ $\mathbf{I_6}$: $I(1, y) = y$;
$\mathbf{I_7}$: $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$; $\quad$ $\mathbf{I_8}$: $I(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leq y$;
$\mathbf{I_9}$: $I(x, y) = I(N_S(y), N_S(x))$; $\quad$ $\mathbf{I_{10}}$: $I(x, y) = 0 \Leftrightarrow x=1$ e $y=0$;

Se $I : U^2 \to U$ é uma implicação fuzzy satisfazendo I_1, então a função N_I: U→ U pode ser definida como $N_I(x) = I(x, 0)$.

Seja *S* uma t-conorm e N uma negação fuzzy, uma S-implicação $I_{S,N}: U^2 \to U$ BUSTINCE et. al(2003) é uma implicação fuzzy definida por

$$\boldsymbol{I_{S,N}(x, y) = S(N(x), y).}$$

S-implicações satisfazem as propriedades I_1, I_2, I_6, I_7, I_9 e S-implicações Fortes satisfazem além das anteriores, I_3, I_4, I_{10} *e*

$\mathbf{I_{11}}$: $I(x, y) \geq N_S(x)$ *(TRILLAS; VALVERDE, 2008).*

De acordo com ATANASSOV (1989), um conjunto fuzzy intuicionista *(IFS)* A_I não vazio, no universo χ, é expresso como

$$A_I = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) : x \in \chi, \mu_A(x) + \nu_A(x)) \leq 1\}.$$

Um elemento *x* em um *IFS* A_I é expresso através de um par ordenado $(\mu_A(x), \nu_A(x))$, o qual é uma generalização de um elemento em *FS*

$$A_I = \{(x, \mu_A(x)) : x \in \chi, \mu_A(x) + \nu_A(x)) = 1\}.$$

sendo $\nu_A(x)$, o valor do grau de não pertinência de um elemento x em A_I.

Uma função $\pi_A : \chi \to U$, determina o índice fuzzy intuicionista (IFIx) de um elemento x ∈ χ em IFS A_I, e está definida pela expressão

$$\pi_A(x) = N_S(\mu_A(x) + \nu_A(x)), \forall x \in \chi, \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$$

Uma negação fuzzy intuicionista (*IFN*) $N_I : \tilde{U} \to \tilde{U}$ satisfaz, para todo $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ ∈ Ũ, as seguintes propriedades:

$\mathbf{N_{I1}}$: $N(\tilde{0}) = N(0, 1) = \tilde{1}$ e $N(\tilde{1}) = N(1, 0) = ;\ \tilde{0}$
$\mathbf{N_{I2}}$: Se $\tilde{x} \geq \tilde{y}$ então $N(\tilde{x}) \leq N(\tilde{y})$.
$\mathbf{N_{I3}}$: $N(N_I(\tilde{x})) = \tilde{x}$, $\forall \tilde{x} \in \tilde{U}$ *(SIFN)*

Quando *N* é uma *SIFN*, *f* é uma função intuicionista dual. Por BACZYNSKI (2004) uma *SIFN* $N_I: \tilde{U} \to \tilde{U}$ é uma *SIFN* sss existir uma *SFN* $N: \tilde{U} \to \tilde{U}$ tal que:

$$\boldsymbol{N_I(\tilde{x}) = (N(N_S(x_1)), N_S(N(x_2)))}$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Definição: Conforme BUSTINCE et al. (2011), consideramos a função $\pi: \tilde{U} \to U$ chamada de índice fuzzy intuicionista generalizado associado a *SFN* se para todo *x*, *y*, *z*, *t* ∈ *U*, podermos considerar:

$\boldsymbol{\pi_1}$: $\pi(x,y)=1 \Leftrightarrow x=y=0$; $\quad$ $\boldsymbol{\pi_2}$: $\pi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x+y=1$;
$\boldsymbol{\pi_3}$: se $(z,t) \leqslant_{\tilde{U}} (x,y) \Rightarrow \pi(x,y) \leq \pi(z,t)$; $\quad$ $\boldsymbol{\pi_4}$: $\pi(x,y)=\pi(N_I(x,y))$ se N_I é SFN.

<u>*Proposição 1*</u>*:* Seja N_I uma *SFN*, a função $\pi: \tilde{U} \to U$ é chamada *A-GIFIx(N)* sss existir uma função $I: U^2 \to U$ que verifica I_1, I_8, I_9 e I_{10} tal que:

$$\boldsymbol{\pi_I(x, y) = N_I(I(1 - y, x))}$$

Na tabela 1 apresentamos o índice fuzzy intuicuionista de Atanassov associado as implicações fuzzy: R_0, Lukaziewicz, Reichenbach, Gaines-Rescher e I_{30}.

Fuzzy Implications	$A-GIFIx$
$I_0(x,y)=\begin{cases}1, & \text{if } x\le y,\\ \max(1-x,y), & \text{otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_0(x,y)=\begin{cases}0, & \text{if } x+y=1,\\ 1-\max(x,y), & \text{otherwise;}\end{cases}$
$I_{LK}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{if } x\le y,\\ 1-x+y, & \text{otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_{LK}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{if } x+y=1,\\ 1-x-y, & \text{otherwise;}\end{cases}$
$I_{RB}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{if } x\le y,\\ 1-x+xy, & \text{otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_{RB}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{if } x+y=1,\\ 1-x-y+xy, & \text{otherwise;}\end{cases}$
$I_{GR}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{if } x\le y,\\ 0, & \text{otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_{GR}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{if } x+y=1,\\ 1, & \text{otherwise;}\end{cases}$
$I_{30}(x,y)=\begin{cases}\min(1-x,y,0.5), & \text{if } 0<x<y<1,\\ \min(1-x,y), & \text{otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_{30}(x,y)=\begin{cases}1-\min(x,y,0.5), & \text{if } 0<x,y<1\\ & \text{and } x+y=1,\\ 1-\min(x,y), & \text{otherwise;}\end{cases}$

Tabela 1: Exemplificando A – GIFIx

3.1 A-GIFIx conjugado à Implicações Fuzzy

<u>Proposição 2</u>: Sejam N_I uma *SIFN*, $\varphi \in Aut(U)$. A função $\pi: \tilde{U} \rightarrow U$, é dada por:

$$\pi_{\mathbf{I}}\varphi\,(x, y) = N_{\mathbf{I}}\varphi\,(I^{\varphi}\,(1 - y, x))$$

<u>Prova</u>: Suponha que

π_1: $N^{\varphi}(I^{\varphi}\,(1 - y, x)) = 1 \Leftrightarrow I^{\varphi}\,(1 - y, x) = 0 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(I\,(\varphi\,(1 - y), \varphi\,(x))) = 0 \Leftrightarrow$

$I\,(\varphi\,(1 - y), \varphi\,(x)) = 0 \Leftrightarrow \varphi\,(1 - y) = 1 \text{ e } \varphi\,(x) = 0 \Leftrightarrow$

$1 - y = 1 \text{ e } x = 0 \Leftrightarrow y=0 \text{ e } x=0;$

π_2: $N^{\varphi}(I^{\varphi}\,(1 - y, x)) = 0 \Leftrightarrow I^{\varphi}\,(1 - y, x) = 1 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(I\,(\varphi\,(1 - y), \varphi\,(x))) = 1 \Leftrightarrow$

$I\,(\varphi\,(1 - y), \varphi\,(x)) = 1 \Leftrightarrow \varphi\,(1 - y) = 1 \le \varphi\,(x) = 0 \Leftrightarrow$

$1 - y = x \Leftrightarrow x + y=1;$

π_3: $(z, t) \preccurlyeq (x, y) \Rightarrow z \le x \text{ e } t \le y \Rightarrow z \le x \text{ e } N_S\,(t) \le N_S(y) \Rightarrow$

$\varphi(z) \le \varphi(x) \text{ e } \varphi(1 - t) \ge \varphi(1 - y) \Rightarrow$

$N^{\varphi}(I^{\varphi}\,(1 - y, x)) \le N^{\varphi}(I^{\varphi}\,(1 - t, z)) \Rightarrow \pi_{\mathbf{I}}\varphi\,(x, y) \le \pi_{\mathbf{I}}\varphi\,(z, t);$

π_4: N_I é *SIFN*, $\pi\,(N_I(x, y) = \pi_{\mathbf{I}}\varphi\,(N\,(N_S(y)), N_S\,(N(x))) =$

$N^{\varphi}(\,I^{\varphi}\,(\,N_s^{2}\,(\,N(x)), N\,(\,N_s(y))) = N^{\varphi}\,(\,I^{\varphi}\,(\,N(x), N\,(\,N_s(y))) =$

$N^{\varphi}\,(\,I^{\varphi}\,(\,N^{2}\,(\,N_s(y)), N^{2}(x)) = N^{\varphi}\,I^{\varphi}\,(\,I^{\varphi}\,(\,N_s(y), x)) = \pi(x,y).$

Na tabela 2, as implicações da tabela 1 são associadas $\varphi\,(x) = x^2$ e $\varphi^{-1} = \sqrt{x}$

Fuzzy Implications	$A-GIFIx$
$I_0^{\phi}(x,y)=\begin{cases}1, \text{ if } x\le y,\\ \sqrt{\max((1-x)^2,y^2)}, \text{otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_{I_0^{\phi}}(x,y)=\begin{cases}0, \text{ if } x+y=1,\\ 1-\sqrt{\max(y^2,x^2)}, \text{otherwise;}\end{cases}$
$I_{LK}^{\phi}(x,y)=\begin{cases}1, \text{ if } x\le y,\\ \sqrt{1-x^2+y^2}, \text{ otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_{I_{LK}^{\phi}}(x,y)=\begin{cases}0, \text{ if } x+y=1,\\ 1-\sqrt{2y-y^2+x^2}, \text{otherwise;}\end{cases}$
$I_{RB}^{\phi}(x,y)=\begin{cases}1, \text{ if } x\le y,\\ \sqrt{1-x^2+x^2y^2}, \text{otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_{I_{RB}^{\phi}}(x,y)=\begin{cases}0, \text{ if } x+y=1,\\ 1-\sqrt{x^2+(1-x^2)(2y-y^2)}, \text{otherwise;}\end{cases}$
$I_{GR}^{\phi}(x,y)=\begin{cases}1, \text{ if } x\le y,\\ 0, \text{otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_{I_{GR}^{\phi}}(x,y)=\begin{cases}0, \text{ if } x+y=1,\\ 1, \text{otherwise;}\end{cases}$
$I_{30}^{\phi}(x,y)=\begin{cases}\sqrt{\min(1-x^2,y^2,0.5)},\\ \quad \text{if } 0<x<y<1,\\ \sqrt{\min((1-x)^2,y^2)}, \text{otherwise;}\end{cases}$	$\Pi_{I_{30}^{\phi}}(x,y)=\begin{cases}1-\sqrt{\min(1-(1-y)^2,x^2,0.5)},\\ \quad \text{if } 0<x,y<1 \text{ and } x+y=1,\\ 1-\sqrt{\min(1-(1-y)^2,x^2)}, \text{otherwise;}\end{cases}$

Tabela 2: A – GIFIx associadas à $\varphi\,(x) = x^2$ e $\varphi^{-1} = \sqrt{x}$

3.2 A-GIFIx associado à S-Implicações

Conforme BACZYNSKI (2004), uma implicação fuzzy contínua *I* satisfaz as propriedades I_7 e I_8 sss quando associada a implicação de Reichenbach (I^{φ}_{RB}) seguindo as seguintes proposições:

Proposição 3: Seja φ_1 e φ_2 automorfismos em U, (BUSTINCE et. al, 2011). Então:

$$\boldsymbol{\pi_I{}^{\varphi}{}_{RB}(x) = \varphi_1^{-1}(\varphi_2(1 - x_2) - \varphi_2(x_1))},\ \forall\, x \in U,$$

é um *A-GIFIx* associado a uma *SFN* $N(x) = \varphi_2^{-1}(1 - \varphi_2(x))$.

Proposição 4: Seja N_I uma *SFN*. Uma função $\pi: \tilde{U} \rightarrow U$ é uma *A-GIFIx(N)* sss (S,N)-implicação $I_{S,N}: U^2 \rightarrow U$ tal que

$$\boldsymbol{\pi_I(x, y) = N(S(N(1 - y), x))}$$

Prova: $\pi_I(x,y) = N(I_{S,N}(1 - y, x)) = N(S(N(1 - y), x))$, para todo $(x,y) \in \tilde{U}$.
Quando $N = N_S$, então: $\pi_I(x,y) = N_S(S(x, y))$.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, o conceito de índice fuzzy intuicionista generalizado de Atanassov foi extendido por diferentes métodos de construção, em particular, utilizando as definições de automorfismo fuzzy conjugado à S-implicações.

A continuação dos trabalhos considera a extensão do estudo das propriedades verificadas pelo *A-GIFIx* aplicado às co-implicações fuzzy e a inserção dos conceitos de agregadores e entropia associados à abordagem fuzzy intuicionista.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRENECHEA, E., BUSTINCE, H., PAGOLA, M., FERNANDEZ, J. e SANZ, J. Generalized atanassov's intuitionistic fuzzy index. construction method. **IFSA EUSFLAT** Conference, pg 478-482, 2009.

BUSTINCE, H., BARRENECHEA, E., PAGOLA, M., FERNANDEZ, J., GUERRA, C., COUTO, P. e MELO, P. Generalized atanassov's intuitionistic fuzzy index: Construction of atanassov's fuzzy entropy from fuzzy implication operators. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, 19(01):51-69, 2011.

LIN, L., XIA, Z. Intuitionistic fuzzy implication operators: Expressions and properties. **Journal of Applied Mathematics and Computing**, 22(3):325-338.

[KLEMENTE, P., NAVARA, M. A survey on different triangular norm-based fuzzy logics. **Fuzzy Sets and Systems**, 101(2):241-251, 1999.

[BUSTINCE, H., BURILLO, P., SORIA, F. Automorphisms, negations and implication operators. **Fuzzy Sets Systems**, 134(2):209-229, 2003.

FODOR, J., ROUBENS, M. Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support. **Kluwer Academic Publisher**, Dordrecht, 1994.

TRILLAS, E., VALVERDE, L. On implication and indistinguishability in the setting of fuzzy logic. **Management Decision Support Systems using Fuzzy Sets and Possibility Theory,** pg 198-212, 1985.

ATANASSOV, K., GARGOV, G. Elements of intuitionistic fuzzy logic. **Fuzzy Sets and Systems**, 9(1):39-52, 1998.

BACZYNSKI, M. Residual implications revisited. Notes on the Smets-Magrez. **Fuzzy Sets and Systems**, 145(2):267-277, 2004.