ROBUSTEZ DE OPERADORES DIFERENÇA FUZZY INTUICIONISTA

ROSANA ZANOTELLI[1]; WILSON CARDOSO[1], RENATA REISER[1]

[1] *Universidade Federal de Pelotas (PPGC-UFPel)*
{rzanotelli, wrdscardoso, reiser }@inf.ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho estende o estudo da robustez em sistemas fuzzy. Após estudos prelininares introduzidos em REISER et al. (2014) e ZANOTELLI et al. (2015), este artigo considera a análise da robustez definida pela δ-sensibilidade dos operadores de (co)diferença na Lógica Fuzzy Intuicionista de Atanassov (A-IFL) ATANASSOV, GARGOV (1989).

Focando em componentes ponto a ponto obtidos pelas projeções relativas às funções de pertinência e não pertinência, esta análise pode melhorar o estudo da estabilidade de sistemas baseados em regras fuzzy intuicionista.

Consideram-se as negações fuzzy intuicionistas representáveis, incluindo o conceito de dualidade correspondente. Como principal resultado, mostramos a δ-sensibilidade do operador de diferença fuzzy, com base no estudo da δ-sensibilidade de classes representáveis por normas e conormas triangulares.

Este artigo está organizado da seguinte maneira. Em primeiro lugar, descrevem-se os conceitos básicos da A-IFL. A δ-sensibilidade da A-IFDs e A-IFEs, incluindo os resultados gerais que são apresentados na seção 3. Considerações finais e continuação do trabalho são relatadas na conclusão.

2. METODOLOGIA

Os procedimentos metodológicos se referem ao estudo da extensão fuzzy dos conectivos de diferença e (co)diferença fuzzy intuicionista, mas para isso precisamos nos reportar a noção da Lógica Fuzzy Intuicionista (ILF) relativo a negações, diferença e (co)diferença, definidos a partir de propriedades algébricas brevemente descritas a seguir.

Seja $\widetilde{U}$ = $\{(x_1, x_2) \in U^2 \mid x_1 \leq$ Ns $(x_2)\}$ os valores de um conjunto fuzzy intuicionista e $l_{\widetilde{U}}$, $r_{\widetilde{U}}$: $\widetilde{U} \rightarrow U$ a função de projeções em $\widetilde{U}$, como são dadas por $l_{\widetilde{U}}(\tilde{x}) = l_{\widetilde{U}}(x_1, x_2) = x_1$ e $r_{\widetilde{U}}(\tilde{x}) = r_{\widetilde{U}}(x_1, x_2) = x_2$, respectivamente .

Assim, para todo $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \widetilde{U}^n$, tal que $\tilde{x}_i = (x_{i1}, x_{i2})$ e $x_{i1} \leq N_S(x_{i2})$ onde 1 $\leq$ i $\leq$n, considerando $l_{\widetilde{U}^n}$, $r_{\widetilde{U}^n}$: $\widetilde{U}^n \rightarrow \widetilde{U}$ como segue nas Eqs.(1) e (2):

$$l_{\widetilde{U}^n}(\tilde{X}) = (l_{\widetilde{U}}(\tilde{x}_1), l_{\widetilde{U}}(\tilde{x}_2), \dots, l_{\widetilde{U}}(\tilde{x}_n)) = (x_{11}, x_{12,\dots,} x_{n1}); \quad (1)$$

$$r_{\widetilde{U}^n}(\tilde{X}) = (r_{\widetilde{U}}(\tilde{x}_1), r_{\widetilde{U}}(\tilde{x}_2), \dots, r_{\widetilde{U}}(\tilde{x}_n)) = (x_{12}, x_{22,\dots,} x_{n2}). \quad (2)$$

Por ATANASSOV, GARGOV (1989) para $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in \widetilde{U}$, a relação de ordem $\leq_{\widetilde{U}}$ é dado como $\tilde{x} \leq \widetilde{U}\, \tilde{y} \Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ e $x_2 \geq y_2$, tal que $\tilde{0} = (0,1) \leq_{\widetilde{U}} \tilde{x}$ e $\tilde{1} = (1,0) \geq_{\widetilde{U}} \tilde{x}$.

Uma *negação fuzzy intuicionista* (IFN), N_I : $\widetilde{U} \rightarrow \widetilde{U}$ satisfaz as propriedades:

$\boldsymbol{N_I}$**1**: $N_I(\tilde{0}) = N_I(0,1) = \tilde{1}$ e $N_I(\tilde{1}) = N_I(1,0) = \tilde{0}$;

$\boldsymbol{N_I}$**2**: Se $\tilde{x} \geq \tilde{y}$ então $N_I(\tilde{x}) \leq N_I(\tilde{y})$, $\forall\ \tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{U}$.

Em adição, se N_I é uma negação fuzzy intuicionista forte (SIFN) então:

$\boldsymbol{N_I}$**3**: $N_I\ (N_I\ (\tilde{x})) = \tilde{x}$, $\forall\, \tilde{x} \in \widetilde{U}$.

Seja N_I uma IFN. Onde $\tilde{f}$: $\widetilde{U}^n \rightarrow \widetilde{U}$, a N_I-função dual intuicionista de $\tilde{f}$, denotado por $\tilde{f}_{N_I}$:$\widetilde{U}^n \rightarrow \widetilde{U}$ é dado pela Eq.(3):

$$\tilde{f}_{N_I}(\tilde{X}) = N_I(\widetilde{f}(N_I\ (\tilde{x}_1),\ \dots\ ,\ N_I(\tilde{x}_n)\ )),\ \forall\, \tilde{X} = (\tilde{x}_1,\ \dots\ ,\ \tilde{x}_n) \in \widetilde{U}^n. \quad (3)$$

Por CORNELIS et al. (2004), $N_I : \widetilde{U}^n \rightarrow \widetilde{U}$ é uma SIFN se e somente se existe uma $N: U \rightarrow U$ tal que a Eq.(4) é satisfeita:

$$N_I\ (\tilde{x}) = (N(N_S(x_2)), N_S(N(x_1))),\ \forall\ \tilde{x} \in \widetilde{U} \tag{4}$$

Adicionalmente, se $N = N_S$ a Eq.(4) pode ser reduzida para $N_I\ (\tilde{x}) = (x_2, x_1)$.

Uma função $(S_I)T_I: \widetilde{U}^2 \rightarrow \widetilde{U}$, é uma (co)norma triangular fuzzy intuicionista (t-(co)norma), se é comutativa, associativa, monotonica não-decrescente, com elemento neutro $(\tilde{0})\tilde{1}$, denotada por A-IFT(A-IFS). Por CORNELIS et al. (2004) definição 5, uma t-(co)norma intuicionista é representável quando satisfaz duas condições:

(i) Existem T', $T(S', S) : U^2 \rightarrow U$ tal que

$$T(x, y) \leq N_S(S(N_S(x\ ), N_s(y)));$$

$$T'(x, y) \leq N_S(S'(N_S(x\ ), N_s(y))),\ \forall\ x, y \in U.$$

(ii) Para todo $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2) \in \widetilde{U}$, *tem-se que*

$$T_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = \big(T(x_1, y_1)S(x_2, y_2)\big);$$

$$S_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = S^{'}(x_1, y_1), T'(x_2, y_2). \tag{5}$$

Definição 1. Em HUAWEN, $D_I(E_I) : \widetilde{U}^2 \rightarrow \widetilde{U}$ é uma Atanassov-(co)diferença fuzzy intuicionista (A-IFD (A-IFE)), se satisfaz, para todo $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \widetilde{U}$, as seguintes propriedades:

$\boldsymbol{D_I 0}$: $D_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{x}$;
$\boldsymbol{D_I 1}$: $D_I(\tilde{x}, \tilde{0}) = \tilde{x}$;
$\boldsymbol{D_I 2}$: $\tilde{y} \leq \tilde{z} \rightarrow D_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq D_I(\tilde{x}, \tilde{z})$;
$\boldsymbol{D_I 3}$: $\tilde{x} \leq \tilde{y} \rightarrow D_I(\tilde{x}, \tilde{z}) \leq D_I(\tilde{y}, \tilde{z})$;
$\boldsymbol{D_I 4}$: $D_I(1, \tilde{x}) = N_I(\tilde{x})$ é uma IFN.

$\boldsymbol{E_I 0}$: $E_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \tilde{x}$;
$\boldsymbol{E_I 1}$: $E_I(\tilde{x}, 1) = \tilde{x}$;
$\boldsymbol{E_I 2}$: $\tilde{y} \leq \tilde{z} \rightarrow E_I(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq E_I(\tilde{x}, \tilde{z})$;
$\boldsymbol{E_I 3}$: $\tilde{x} \leq \tilde{y} \rightarrow E_I(\tilde{x}, \tilde{z}) \leq E_I(\tilde{y}, \tilde{z})$;
$\boldsymbol{E_I 4}$: $E_I(0, \tilde{x}) = N_I(\tilde{x})$ é uma IFN.

Proposição 1. Para todo $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{U}$, *o operador* $D_I(E_I) : \widetilde{U}^2 \rightarrow \widetilde{U}$ dado pelas Eqs. (6) e (7) é um operador (co)diferença fuzzy intuicionista (A-IFD e A-IFE):

$$D_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (T_I(\tilde{x}, N_I(\tilde{y}))); \tag{6}$$

$$E_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S_I(\tilde{x}, N_I(\tilde{y})))\ . \tag{7}$$

Proposição 2. Seja $T_I(S_I)$ um operador A-IFT(A-IFS) representável. A função $D_I(E_I) : \widetilde{U}^2 \rightarrow \widetilde{U}$, dada pela Eq.(6) (Eq.(7)), $\forall\, \tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{U}$ pode ser expressa da seguinte forma:

$$D_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (T(x_1, y_2), S(x_2, y_1)); \tag{8}$$

$$E_I(\tilde{x}, \tilde{y}) = (S(x_1, y_2), T(x_2, y_1)). \tag{9}$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1. ROBUSTEZ DOS CONECTIVOS FUZZY INTUICIONISTA

Introduzimos a definição da δ-sensibilidade de uma função de orden n $f_I : \widetilde{U}^n \rightarrow \widetilde{U}$ no ponto $\tilde{X} = (\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2,\ \ldots,\ \tilde{x}_n) \in \widetilde{U}^n$. Assim, quando $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2) \in U^2$, *a* δ-sensibilidade de um operador intuicionista f_I no ponto $\tilde{X} \in \widetilde{U}^n$ é definida nos termos das projeções a esquerda $(l_{\widetilde{U}^n}(\tilde{X}))$ e projeções a direita $(r_{\widetilde{U}^n}(\tilde{X}))$ relacionando a δ-sensibilidade do grau de pertinência e não-pertinência de um elemento $x \in X$ associado com o IFS $f_I(\widetilde{U}^n)$.

Mostra-se que o estudo da robustez preserva as funções de projeções e pode-se analisar a δ-sensibilidade em cada um dos argumentos (δ_1, δ_2) de forma independente.

3.1.1. Robustez dos operadores de diferença fuzzy intuicionista

As seguintes notações devem ser consideradas:

$$\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{y});$$
$$f_I\lfloor \tilde{X} \rceil \equiv f_I((\tilde{x} - \tilde{\delta}) \vee 0, (\tilde{y} + \tilde{\delta}) \wedge 1);$$
$$f_I \lceil \tilde{X} \rfloor \equiv f_I((\tilde{x} + \tilde{\delta}) \wedge 1, (\tilde{y} - \tilde{\delta}) \vee 0).$$

Proposição 3. Se $f_I : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ verifica ambas propriedades, isotônica no primeiro argumento e antitônica no segundo argumento e $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2) \in \tilde{U}$ o seguinte é verificado:

$$\Delta_f(\tilde{X}, \tilde{\delta}) = (f\lfloor \tilde{X} \rceil - f(\tilde{X})) \vee (f(\tilde{X}) - f\lceil \tilde{X} \rfloor), \ \forall \tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{U}^2 \qquad (10)$$

É estudado a robustez da A-IFD e operador dual no ponto $\tilde{X} \in \tilde{U}^2$.

Proposição 4. Quando $D_I\ (E_I) : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$, $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2) \in \tilde{U}$, então:

$$\Delta_{D_I}(\tilde{X}, \tilde{\delta}) = \left(D_I\lceil \tilde{X} \rfloor - D_I(\tilde{X})\right) \vee \left(D_I(\tilde{X}) - D_I\lfloor \tilde{X} \rceil \right); \qquad (11)$$

$$\Delta_{E_I}(\tilde{X}, \tilde{\delta}) = (E_I\lceil \tilde{X} \rfloor - E_I(\tilde{X})) \vee (E_I(\tilde{X}) - E_I\lfloor \tilde{X} \rceil), \ \tilde{X} = (x_1, x_2) \in \tilde{U}^2 \qquad (12)$$

Proposição 5. Seja $D_I\ (E_I) : \tilde{U}^2 \to \tilde{U}$ um operador (co)diferença representável dado pelas Eqs. (8) e (9). Onde $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2) \in \tilde{U}^2$, *a* δ-sensibilidade de D_I no ponto $\tilde{X}$ é definida por

$$\Delta_{D_I}(\tilde{X}, \tilde{\delta}) = (\Delta_D\ (l_{\tilde{U}}(N_S(x_1), x_2), \delta_1), \Delta_D\ (r_{\tilde{U}}(N_S(x_1), x_2), \delta_2)). \qquad (13)$$

Analogamente, a δ-sensibilidade de E_I no ponto $\tilde{X}$ é definida por

$$\Delta_{E_I}(\tilde{X}, \tilde{\delta}) = (\Delta_E\ (l_{\tilde{U}}(x_1, N_S(x_2)), \delta_1), \Delta_E\ (r_{\tilde{U}}(x_1, N_S(x_2)), \delta_2)) \qquad (14)$$

A Figura 1 mostra os principais resultados das proposições 4 e 5, garantindo a comutatividade das composições: projeções e operador de (co)-diferença.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{\delta}) \arrow[r, "\text{Eq.(10)}"] \arrow[d, "\text{Eqs.(1)(2)}"] & \Delta_{D_I}(\tilde{X}, \tilde{\delta}) \arrow[d, "\text{Eqs.(1)(2)}"'] \\
(r_{\tilde{U}^2}(\tilde{X}, \tilde{\delta}), l_{\tilde{U}^2}(\tilde{X}, \tilde{\delta})) \arrow[r, "\text{Eqs.(11)(12)}"] & (\Delta(l_{\tilde{U}} \circ D_I)(\tilde{x}, \tilde{y}), \Delta(r_{\tilde{U}} \circ D_I)(\tilde{x}, \tilde{y}))
\end{tikzcd}$$

Figura 1. Robustez do operador na classe A-IFDs representáveis

Teorema 1. Considere $\delta \in U$ e $X \in U^2$. Segue-se que um par de funções N_{S_I}-dual D_I e E_I pode ser descritas pelas seguintes expressões:

(i) $\Delta_{D_I}\left((\tilde{0}, \tilde{0}), \tilde{\delta}\right) = \Delta_{E_I}\left((\tilde{1}, \tilde{1}), \tilde{\delta}\right)$ e $\Delta_{D_I}\left((\tilde{0}, \tilde{1}), \tilde{\delta}\right) = \Delta_{E_I}\left((\tilde{1}, \tilde{0}), \tilde{\delta}\right)$

(ii) $\Delta_{D_I}\left((\tilde{1}, \tilde{0}), \tilde{\delta}\right) = \Delta_{E_I}\left((\tilde{0}, \tilde{1}), \tilde{\delta}\right)$ e $\Delta_{D_I}\left((\tilde{1}, \tilde{1}), \tilde{\delta}\right) = \Delta_{E_I}\left((\tilde{0}, \tilde{0}), \tilde{\delta}\right)$

Se $D_I = D_{T_P, N_S I}$ e $E_I = E_{S_P, N_S I}$, a Tabela 1 sumariza δ-sensibilidade em A-IFD e A-IFE, relacionadas nos pontos terminadas de $\tilde{U}$.

Tabela 1: Robustez dos operadores A-IFD E A-IFE nos pontos terminais

$\tilde{X}$	$\Delta_{D_{T_P,N_S I}}$	$\Delta_{E_{S_P,N_S I}}$
$(\tilde{0},\tilde{0})$	$(1,1)$	(δ_1,δ_2)
$(\tilde{0},\tilde{1})$	$(1-(1-\delta_1)^{\delta_1},1-(1-\delta_2)^{\delta_2})$	$({\delta_1}^{(1-\delta_1)},{\delta_2}^{(1-\delta_2)})$
$(\tilde{1},\tilde{0})$	$({\delta_1}^{(1-\delta_1)},{\delta_2}^{(1-\delta_2)})$	$(1-(1-\delta_1)^{\delta_1},1-(1-\delta_2)^{\delta_2})$
$(\tilde{1},\tilde{1})$	(δ_1,δ_2)	$(1,1)$

4. CONCLUSÃO

O operador de robustez, baseado na δ-sensibilidade de um conetivo fuzzy intuicionista, de ordem n e no ponto $X \in U^n$, preserva as funções de projeções, operando de forma independente nos argumentos de cada conectivo fuzzy intuicionista em A-IFL. Esta análise também preserva as construções duais.

Como continuação do trabalho, foca-se na análise da sensibilidade de outros conectivos fuzzy, bem como das relações fuzzy que compõem as regras de inferência.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATANASSOV, K. Intuitionistic Fuzzy Sets, **Fuzzy Systems**, 20, p. 87–96, 1986.

ATANASSOV, K., GARGOV, G. Elements of Intuitionistic Fuzzy Logic. Part I, **Fuzzy Sets and Systems**, 95 p. 39–52, 1989.

CORNELIS, G., DESCHRIJVER, G., KERRE, E. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms. **IEEE TFS**, v.12 N.1 p. 45–61, 2004.

HUAWEN, L. Difference operation defined over the intuitionistic fuzzy sets**, School of Mathematics and System Sciences**, Shandong University, Jinan, Shandong, 250100.

LI, Y.; LI, D.; PEDRYCZ, W.; WU, J. An approach to measure the robustness of fuzzy reasoning, **Intl. Journal of Intelligent Systems**, v.20(4), p. 393-413, 2005.

REISER, R.; BEDREGAL, B. Robustness of N-dual fuzzy connectives, In: **Advances in Intelligent and Soft Computing**, **EUROFUSE 2011**, (P. Melo-Pinto, P. Couto, C. Serôdio, J. Fodor and B. Baets, eds.) p. 79-90, Springer, Heidelberg, 2012.

REISER, R.; BEDREGAL, B. Robustness on Intuitionistic Fuzzy Connective, **Trends and Computational and Applied Mathematics**, 15(2), p. 133-149, 2014.

ZANOTELLI, R. M., REISER, R. H. S., CAVALHEIRO, S. C., FOSS, L. Sensitivity and dual constructions on the fuzzy f-xor class, **in 2014 Worshop-School on Theoretical Computer Science (WEIT 2014)** – IEEE Conf. Publications, 2013, p. 105–110, DOI: 10.1109/WEIT.2013.

ZANOTELLI, R., REISER, R., COSTA, S., FOSS, L., BEDREGAL, B. Towards robustness and duality analysis of intuitionistic fuzzy aggregations, **Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)**, 2015 IEEE International Conference on, p. 1–8, 2015.