

# COMPARANDO COTAS VARIACIONAIS E HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA NO ESTUDO DO COEFICIENTE EFETIVO DE UM COMPÓSITO BIFÁSICO LINEAR

MARIA CLOTILDE CARRÉ CHAGAS NETA<sup>1</sup>; ROBERTO MARTINS DA SILVA  
DÉCIO JUNIOR<sup>2</sup>; LESLIE DARIEN PÉREZ FERNÁNDEZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – netamariacc@gmail.com

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas – roberto.decio.jr@gmail.com

<sup>3</sup>Universidade Federal Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br

## 1. INTRODUÇÃO

Os compósitos são materiais que contém dois ou mais componentes, fazem parte de uma classificação dos materiais heterogêneos, crescentemente estão sendo utilizados em diversas áreas do conhecimento como mecânica de estruturas e representação de alguns fenômenos naturais como o escoamento de água no solo ou até a distribuição de poros em uma rocha.

Nesse contexto, apresenta-se o Método de Homogeneização Assintótica (MHA), que busca encontrar as propriedades efetivas da macroescala dos compósitos. Contudo, conforme MATT (2003) muitas vezes quando não consegue-se obter um valor exato para as propriedades efetivas, logo utiliza-se cotas variacionais, partindo do princípio de que a microestrutura de um material compósito raramente poder ser completamente especificada.

Desse modo, o presente trabalho objetiva-se em encontrar cotas elementares e melhoradas para um compósito bifásico unidimensional, por diferentes métodos e comparar com os resultados obtidos através do método de homogeneização assintótica.

## 2. METODOLOGIA

### Formulação Variacional do Problema

Seja um compósito ocupando uma região  $\Omega$ , para a obtenção das cotas variacionais para energia efetiva  $\hat{W}(\bar{\varepsilon})$  é preciso utilizar do Princípio da Mínima Energia, em que a energia de deformação efetiva, é dada por:

$$\hat{W}(\bar{\varepsilon}) = \inf_{\varepsilon \in S(\bar{\varepsilon})} \langle w(x, \varepsilon) \rangle, \text{ onde } S(\bar{\varepsilon}) = \left\{ \varepsilon \mid \exists u \mid \frac{du}{dx} = \varepsilon, x \in \Omega; u = \bar{\varepsilon}x, x \in \partial\Omega \right\} \quad (1)$$

Similarmente, pelo princípio de mínima energia complementar, a energia de tensão efetiva complementar  $W^*(\bar{\sigma})$ , é dada por:

$$W^*(\bar{\sigma}) = \inf_{\sigma \in S(\bar{\sigma})} \langle W^*(x, \sigma) \rangle, \text{ onde } S^*(\bar{\sigma}) = \left\{ \sigma \mid \frac{d\sigma}{dx} = 0, x \in \Omega; \sigma(x) \cdot n(x) = \bar{\sigma} \cdot n(x), x \in \partial\Omega \right\} \quad (2)$$

Em que  $W^*(x, \sigma)$  é a energia complementar ,considerando que  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$  e  $\sigma = \bar{\sigma}$ :

$$W^*(x, \sigma) = \sup_{\varepsilon} \{ \sigma \cdot \varepsilon - W(x, \varepsilon) \} \quad (3)$$

$$W^*(\bar{\sigma}) = \sup_{\bar{\varepsilon}} \{ \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} - \hat{W}(\bar{\varepsilon}) \} \quad (4)$$

### Obtenção das cotas clássicas

Têm-se as cotas chamadas cotas clássicas ou elementares, que quando substituído  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$  em (1):

$$\hat{W}(\bar{\varepsilon}) \leq \langle W(x, \bar{\varepsilon}) \rangle = \sum_{r=1}^N c_r W_r(\bar{\varepsilon}) \equiv \langle W \rangle(\bar{\varepsilon}) \quad (5)$$

Obtém-se a cota de Voigt , em que:

$$c_r = \langle \Pi_r(x) \rangle \quad (6)$$

É condizente com a quantidade de volume presente em cada concentração da geometria. Enquanto que  $\Pi_r(x)$  é uma função indicadora da fase do compósito,

sendo  $\Pi_r(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_r \\ 0, & x \notin \Omega_r \end{cases}$

Quando substituído  $\sigma = \bar{\sigma}$  em (2):

$$\hat{W}^*(\bar{\sigma}) \leq \langle W^* \rangle(\bar{\sigma}) \quad (7)$$

Aplicando a definição de supremo em (7), encontra-se a cota de Reuss, outra cota elementar.

$$\hat{W}(\bar{\varepsilon}) \geq \left\{ \langle W^* \rangle(\bar{\sigma}) \right\}^* \equiv \langle W^* \rangle^*(\bar{\varepsilon}) \quad (8)$$

Deste modo, encontra-se o que é conhecido como “Garfo de Hill”, ou seja as cotas elementares para  $\hat{W}(\bar{\varepsilon})$ .

$$\langle W^* \rangle^*(\bar{\varepsilon}) \leq \hat{W}(\bar{\varepsilon}) \leq \langle W(\bar{\varepsilon}) \rangle \quad (9)$$

Utilizando a definição clássica de energia  $W(\varepsilon) = \frac{1}{2} a \varepsilon^2$  em (9)

$$\langle a^{-1} \rangle^{-1} \leq \hat{a} \leq \langle a \rangle \quad (10)$$

### Obtenção das cotas melhoradas

Entretanto para conhecer melhor o comportamento do compósito pode-se melhorar as cotas por meio da estrutura variacional generalizada de Hashin-Strikman desenvolvida por TALBOT; WILLIS (1992). Sendo  $W^0(x, \varepsilon)$  o potencial constitutivo de um composto de comparação aplicando a transformada de Legendre, que consiste na transformação de um espaço primal para um espaço dual. Sendo assim, em  $(W - W^0)(x, \varepsilon)$  terá-se  $(W - W^0)^*(x, \pi)$ , para  $\pi$  arbitrário, resultando na seguinte forma:

$$(W - W^0)^*(x, \pi) = \sup_{\varepsilon} \{ \pi \varepsilon - (W - W^0)(x, \varepsilon) \} \quad (11)$$

Através do Princípio da Mínima Energia de (1) em (10), tem-se a cota inferior formal:

$$\hat{W}(\bar{\varepsilon}) \geq \inf_{\varepsilon \in S(\bar{\varepsilon})} \langle \pi \varepsilon + W^0(x, \varepsilon) - (W - W^0)^*(x, \pi) \rangle \quad (12)$$

Considerando  $\pi = \bar{\pi}$  faz-se uma polarização da constante de forma que a cota inferior:

$$\hat{W}(\bar{\varepsilon}) \geq \bar{\pi} \cdot \bar{\varepsilon} + \hat{W}^0(\bar{\varepsilon}) - \sum_r^N c_r (W_r - W_r^0)^*(\bar{\pi}) \quad (13)$$

Quando  $\pi = 0$ , a cota inferior apresenta-se da seguinte forma:

$$\hat{W}(\bar{\varepsilon}) \geq \hat{W}^0(\bar{\varepsilon}) - \sum_r^N c_r \inf_{\varepsilon} \{(W_r - W_r^0)(\varepsilon)\} \quad (14)$$

Caracterizando a cota inferior de PONTE CASTAÑEDA (1991).

### Obtenção do Coeficiente efetivo via MHA

O coeficiente obtido via MHA, é apresentado conforme BAKHVALOV; PANASENKO (1989). Sendo  $a(y)$ , a função que carrega propriedades da microestrutura. Assim o coeficiente efetivo para a célula global poderá ser encontrado através da seguinte forma:

$$\langle a^{-1} \rangle^{-1} = \hat{a} \quad (15)$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  é o operador média de uma função, que no caso de um material periódico, é dado por:

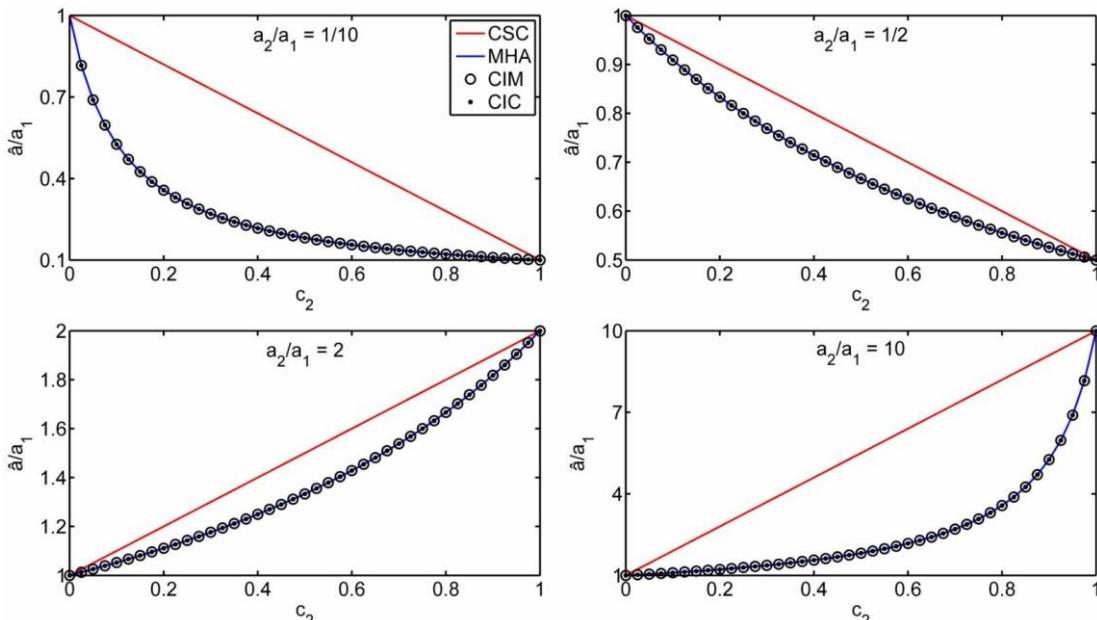
$$\langle \cdot \rangle = \int_0^1 (\cdot) dy \quad (16)$$

### 3. RESULTADO E DISCUSSÃO

Para a aplicação de um exemplo, utiliza-se um compósito linear, bifásico, unidimensional e periódico, com contato perfeito entre as fases. Sendo  $a_1$  e  $a_2$  propriedades elásticas dos materiais constituintes, a relação constitutiva é expressa como:

$$\sigma(x, \varepsilon) = \begin{cases} \sigma_1(\varepsilon) = a_1 \varepsilon, & x \in \Omega_1 \\ \sigma_2(\varepsilon) = a_2 \varepsilon, & x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (17)$$

Desse modo, na Figura 1 apresenta-se para diferentes famílias de compósitos as cotas superior e inferior clássicas (CSC e CIC), cota inferior melhorada (CIM) e o coeficiente efetivo encontrado via MHA, aplicadas na relação constitutiva supracitada.



**Figura 1.** Cotas clássicas, melhoradas e via MHA para diferentes famílias de compósitos.

Observou-se que para todas as famílias de compósitos apresentadas, as cotas inferiores melhoradas e clássicas demonstram os mesmos resultados que as obtidas via MHA, o que também foi verificado analiticamente.

#### 4. CONCLUSÃO

Conseguiu-se obter com sucesso as cotas clássicas e melhorada para o coeficiente efetivo no caso considerado, e ainda sua proximidade com o coeficiente obtido com o MHA. Conclui-se neste caso, que ao otimizar as cotas inferiores clássicas encontra-se exatamente o coeficiente efetivo via MHA.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV,N.S; PANASENKO,G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

MATT, C.F.T. **Condutividade Térmica efetiva de materiais compósitos com microestruturas tridimensionais e resistência térmica interfacial**. Jun. 2003. Tese submetida ao Programa de Pós-graduação de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

PONTE CASTAÑEDA, P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. **Journal Mech. Phys. Solids** 39, p. 45-71,1991.

TALBOT,D.R.;WILLIS,J.R. Some simple explicit bounds for overall behavior of nonlinear composites. **Internacional Journal of Solids ans Structures**, vol.29 p. 1981-1987, 1992.