HOMOGENEIZAÇÃO MATEMÁTICA DE MEIOS MICRO-HETEROGÊNEOS NÃO PERIODICOS MEDIANTE O MÉTODO DOS DOIS ESPAÇOS

DAIANE FRIGHETTO FRIGHETTO[1]; JONATHAN BRUM LAUZ[2]; NOÉ FRANCO DE JESUS[3]; RAFAELA SEHNEM[4]; JULIÁN BRAVO CASTILLERO[5]; LESLIE DARIEN PÉREZ FERNÁNDEZ[6]

[1]Universidade Federal de Pelotas, PPGMMat –daiane.frighetto@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas, PPGMMat – jonathan.brum.Lauz@hotmail.com
[3]Universidade Federal de Pelotas, PPGEMMat –noefrancode@gmail.com
[4]Universidade Federal de Pelotas, PPGMMat – rafa-sehnem@hotmail.com
[5]Universidade de Havana, Cuba – jbravo@matcom.uh.cu
[6]Universidade Federal de Pelotas, IFM – leslie.fernandez@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

O conjunto de métodos para modelar matematicamente fenômenos dinâminos e estáticos que ocorrem em meios que apresentam micro-heterogeneidade estrutural é conhecido com homogeneização matemática. Um deles é o Método de Homogeneização Assintótica (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) que permite transformar problemas sobre meios periódicos, nos quais a heterogeneidade pode ser reproduzida repetindo periódicamente uma célula básica, caracterizados por coeficientes rapidamente oscilantes (problema original), em outros sobre um meio homogêneo (problema homogeneizado) assintoticamente equivalente ao heterogêneo (LIMA, 2016). Quando temos um meio heterogêneo não-periódico, muitas vezes podemos considerar uma amostra representativa desse meio como uma célula básica e utilizar os métodos desenvolvidos para o caso peródico. Contudo, quando isto não é possível, uma alternativa é o Método dos Dois Espaços (KELLER, 1980). Neste trabalho, abordaremos homogeneização de um problema de contorno unidimensional pelo Método dos Dois Espaços e compararemos, de forma analítica e gráfica, as soluções exata e homegeneizada de um problema.

2. METODOLOGIA

Sejam ε tal que $0 < \varepsilon \ll 1$, e $k(x,y)$ e $f(x,y)$ funções de classe $C\infty([0,1] \times \mathbb{R})$, com $k(x,y)$ positiva e limitada, sendo $y = \frac{x}{\varepsilon}$. Analisaremos o seguinte problema de contorno:

$$\frac{d}{dx}\left[k\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du^{\varepsilon}}{dx}\right] = f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad x \in (0,1), \quad u^{\varepsilon}(0) = 0\,, \quad \frac{du^{\varepsilon}}{dx}(1) = 0 \tag{1}$$

Para construirmos o problema homogeneizado, consideramos a derivada total: $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y}$. Substituindo-a na EDO em (1) e atribuindo $L_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(k(x,y)\frac{\partial}{\partial \beta}\right)$ como um operador diferencial obtemos:

$$\varepsilon^{0}L_{xx}u^{\varepsilon} + \varepsilon^{-1}L_{xy}u^{\varepsilon} + \varepsilon^{-1}L_{yx}u^{\varepsilon} + \varepsilon^{-2}L_{yy}u^{\varepsilon} = f \tag{2}$$

Nesta aplicação do Método dos Dois Espaços procuramos uma solução assintótica formal $u^{(2)}(x,\varepsilon)$ do problema (1) da forma:

$$u^{\varepsilon}(x) \approx u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) + O(\varepsilon^2), \tag{3}$$

em que as funções $u_i(x,y)$ são limitadas e diferenciáveis por hipótese. Substituindo (3) em (2) e agrupando por potências do parâmetro pequeno ε obtemos uma igualdade assintótica que será satisfeita somente se existem $u_i(x,y)$ tais que se cumprem as relações seguintes:

$$\varepsilon^{-2} : \; L_{yy}u_0 = 0 \tag{4}$$

$$\varepsilon^{-1} : \; L_{xy}u_0 + L_{yx}u_0 + L_{yy}u_1 = 0 \tag{5}$$

$$\varepsilon^0 : \; L_{xx}u_0 + L_{xy}u_1 + L_{yx}u_1 + L_{yy}u_2 \; = 0 \tag{6}$$

Iniciaremos com a equação (4). Voltamos para a forma $\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) = 0$. Integrando duas vezes de y_0 até y:

$$u_0 = u_0(x, y_0) + k(x, y_0)\left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{y=y_0}\int_{y_o}^{y}\frac{dy'}{k(x,y')} \tag{7}$$

Multiplicando a equação (7) por $\frac{1}{y-y_0}$ e aplicando o limite quando $y \to \infty$ temos $\left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{y=y_0} = 0$, que vale para qualquer $y_0 \in (0, +\infty)$ e portanto vale também para todo y. Assim, u_0 não depende de y:

$$u_0(x, y) = u_0(x) \tag{8}$$

Agora trabalharemos com a equação (5). Voltamos para a forma:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] \tag{9}$$

Podemos simplificar a equação (9) substituindo (8):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] = -\frac{\partial k}{\partial y}\frac{du_0}{dx} \tag{10}$$

Em seguida integramos duas vezes de y_0 até y, multiplicamos toda a equação por $\frac{1}{y-y_0}$ e calculamos o limite quando $y \to \infty$. Obtemos:

$$\left[k\,(x,y)\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=y_0} + k(x,y_0)\frac{du_0}{dx}\right]\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_o}^{y}\frac{dy'}{k(x,y')} = \frac{du_0}{dx} \tag{11}$$

Se $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_o}^{y}\frac{\partial y\prime}{k(x,y\prime)}$ existe, então consideramos que:

$$k_0(x) = \left[\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_o}^{y}\frac{dy'}{k(x,y')}\right]^{-1} \tag{12}$$

Assim:

$$\left[k\,(x,y)\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=y_0} + k(x,y_0)\frac{du_0}{dx}\right]k_0(x)^{-1} = \frac{du_0}{dx} \tag{13}$$

Multiplicando toda a equação (13) por $k_0(x)$ e analisando que se vale para qualquer y_0 então vale para todo y, temos:

$$k\,(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} = -k\,(x,y)\frac{du_0}{dx} + k_0(x)\frac{du_0}{dx} \tag{14}$$

Por fim, trabalharemos com a equação (6).

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - \\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + f(x,y)\end{aligned} \tag{15}$$

Note que podemos simplificar (15) utilizando os resultados anteriores calculados em (8) e (14), assim restamos com:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y} + k(x,y_0)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[k_0(x)\frac{du_0}{dx}\right] + f(x,y) \tag{16}$$

Integrando (16) em relação a y de y_0 até y, multiplicando por $\frac{1}{y-y_0}$ e calculando o limite quando $y \to \infty$, obtemos:

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_o}^{y} f(x,y')\,dy' = \frac{d}{dx}\left[k_0(x)\frac{du_0}{dx}\right] \tag{17}$$

Se $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_o}^{y} f(x,y')\,dy'$ existe, então consideramos que:

$$f_0(x) = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_o}^{y} f(x,y')\,dy' \tag{18}$$

Portanto temos a equação do Problema Homogeneizado:

$$\frac{d}{dx}\left[k_0(x)\frac{du_0}{dx}\right] = f_0(x) \tag{19}$$

A equação (19) será complementada com as codições de contorno que resultam de considerar a solução assintótica formal (3) nas condições de contorno do problema original (1). Assim, obtemos:

$$u_0(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{du_0}{dx}(1) = 0 \tag{20}$$

Finalmente, podemos construir o problema homogeneizado com a equação (19) e as condições (20):

$$\frac{d}{dx}\left[k_0(x)\frac{du_0}{dx}\right] = f_0(x) \qquad x \in (0,1) \qquad u_0(0) = 0\,, \qquad \frac{du_0}{dx}(1) = 0 \tag{21}$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para melhor compreendermos esse processo, consideremos as funções:

$$k\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}}{1+\frac{x}{\varepsilon}} \quad \text{e} \quad f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 + x sen\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{22}$$

Para calcularmos $k_0(x)$, substituímos $k\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)$ em (12) e obteremos $k_0(x) = 1$ e para calcularmos $f_0(x)$ substituímos $f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)$ em (18) e obteremos $f_0(x) = 1$. Substuituindo os valores de $k_0(x)$ e $f_0(x)$ em (21) encontrados no problema homogeneizado:

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} = 1\,, \quad u_0(0) = 0\,, \quad \frac{du_0}{dx}(1) = 0 \tag{23}$$

Encontramos a solução do problema homogeneizado integrando a EDO e aplicando as condições de contorno:

$$u_0(x) = \frac{x^2}{2} - x \tag{24}$$

Podemos comparar (24) com a solução exata do problema original (1), que obtemos integrando a EDO e aplicando as condições de contorno:

$$u^{\varepsilon}(x) = \int_0^x \left[\frac{1+\frac{s}{\varepsilon}}{\sqrt{1+\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^2}}\int_0^s \left(1 + s' sen\left(\frac{s'}{\varepsilon}\right)\right) ds'\right] ds \tag{25}$$

Substituindo as funções de (22) e avaliando quando ε tende a zero, também encontramos (24). Podemos interpretar essa solução de uma maneira mais natural se tomarmos diferentes valores para ε e analisarmos a representação gráfica, que nos mostra que quanto mais ε se aproxima de zero, mais a solução do problema original se aproxima da solução do problema homogeneizado.

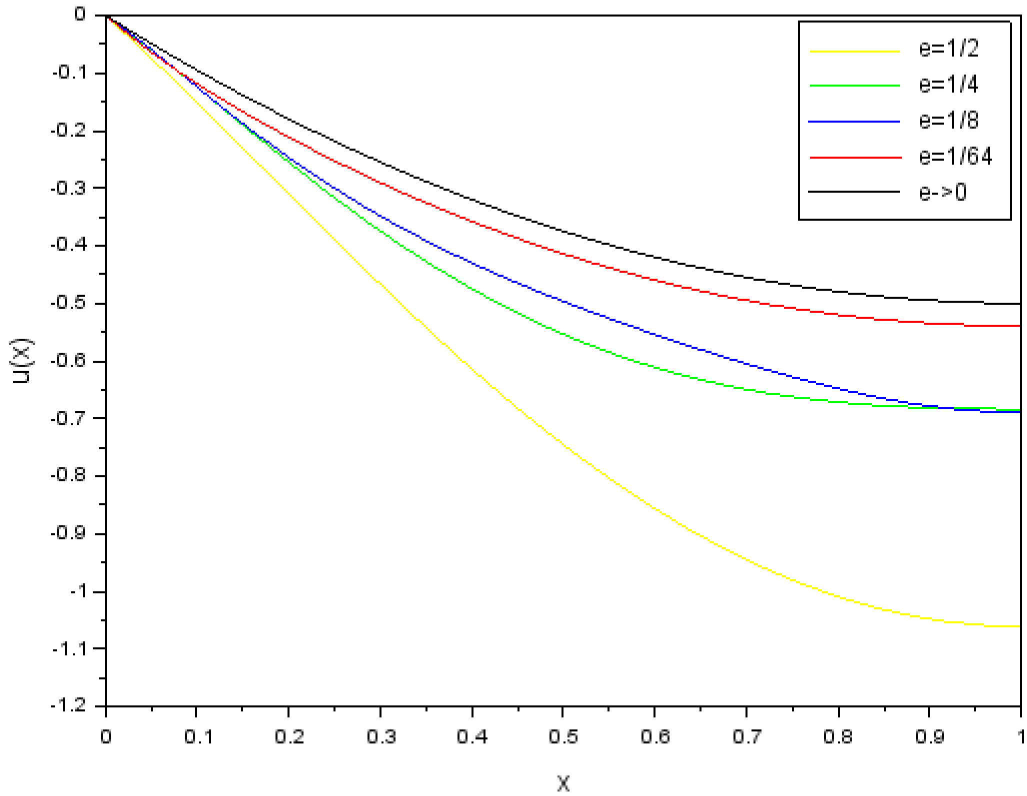

Figura 1: Gráfico comparativo entre solução exata e solução homogeneizada.

4. CONCLUSÕES

A partir da aplicação do Método dos Dois Espaços para homoneização do problema, pôde-se verificar analiticamente e com o auxílio do gráfico, que a solução do prtoblema original se aproxima da solução do problema homogeneizado conforme ε tende a zero. Dessa forma o método desenvolvido apresenta-se como boa alternativa na resolução de problemas não periódicos.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao projeto CAPES nº 88881.030424/2013-01 e seu apoio financeiro.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

LIMA, Marcos Pinheiros de. **Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica.** 2016. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

KELLER, Joseph B. Darcy's law for flow in porous media and the two-space method. In: **CONFERENCE ON NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ENGINEERING AND APPLIED SCIENCE**, Rhode, 1979. Nonlinear Partial Differential Equations In Engineering And Applied Science, New York: Marcel Dekker, INC, 1980. p.429-443.