HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA DE MICROCOMPÓSITOS COM CONTACTO IMPERFEITO ENTRE AS FASES CONSTITUINTES

LARISSA NUNES MEIRELLES DA LUZ[1]; LESLIE D. PÉREZ FERNÁNDEZ [2]; JULIÁN BRAVO CASTILLERO[3]

[1] *Aluna da Licenciatura em Matemática, Instituto de Física e Matemática (IFM), Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – larissa.meirelles@hotmail.com*
[2] *Professor do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat-IFM-UFPel) – leslie.fernandez@ufpel.edu.br*
[3] *Pesquisador Visitante Especial no PPGMMat (CAPES nº 88881.030424/2013-01), Professor do Departamento de Matemática, Faculdade de Matemática e Computação, Universidade de Havana, Cuba – jbravo@matco.uh.cu*

1. INTRODUÇÃO

Compósitos são constituídos por fases distintas indissoluvelmente unidas e podem ser encontrados na natureza ou fabricados para melhorar as propriedades individuais de seus componentes para uma determinada aplicação. Os métodos de homogeneização matemática permitem encontrar com grande precisão e rigor as propriedades efetivas de meios heterogêneos a partir das propriedades físicas e geométricas de seus componentes. Em particular, o método de homogeneização assintótica (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) é utilizado para encontrar os coeficientes que representam as propriedades efetivas de um meio com estrutura periódica. O presente trabalho tem como objetivo o estudo desta técnica matemática de homogeneização para obtenção do comportamento efetivo de meios micro-heterogêneos para construir uma solução assintótica formal de um problema unidimensional linear com contato imperfeito.

Para cada ε fixo, $0 < \varepsilon \ll 1$, consideramos o seguinte problema de valores de contorno para a equação de calor estacionária com campo de temperatura u^ε:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[a^\varepsilon(x)\frac{du^\varepsilon}{dx}\right] = f,\ x \in (0,1)\backslash\Gamma^\varepsilon \\ -\beta^\varepsilon [\![u^\varepsilon(x)]\!] = a^\varepsilon(x)\frac{du^\varepsilon}{dx},\ x \in \Gamma^\varepsilon \\ \left[\!\!\left[a^\varepsilon(x)\frac{du^\varepsilon}{dx}\right]\!\!\right] = 0,\ x \in \Gamma^\varepsilon \\ u^\varepsilon(x) = 0,\ x \in \{0,1\} \end{cases}, \tag{1}$$

onde $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$ é uma função ε-periódica, continuamente diferenciável por partes, positiva e limitada que representa a condutividade térmica; f é a fonte de calor; Γ^ε é o conjunto de pontos de descontinuidades de $a^\varepsilon(x)$ que correspondem às interfaces entre as constituintes; $[\![\cdot]\!]$ representa o salto ao redor de cada descontinuidade de $a^\varepsilon(x)$; a condutância interfacial $\beta^\varepsilon = \beta/\varepsilon$ estabelece a proporcionalidade entre o salto da temperatura e o fluxo de calor nos pontos de Γ^ε, e o fluxo em si é contínuo nestes pontos.

2. METODOLOGIA

O método de homogeneização assintótica (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) procura uma solução assintótica formal do problema (1) que, neste caso, é uma expansão assintótica da sua solução exata. Tal solução assintótica formal é uma série de potências de ε em duas escalas cujos coeficientes são funções 1-

periódicas na variável local $y = x/\varepsilon$ e duas vezes continuamente diferenciáveis em x e por partes em y. Tais coeficientes são obtidos de uma sequência recorrente de problemas que resultam de substituir a série assintótica no problema original (1). Os problemas para os dois primeiros termos da assintótica, u_0 e u_1, são os chamados problemas homogeneizado e local, respectivamente. É possível provar que as soluções exata u^ε e assintótica u^∞ do problema original (1) convergem para a solução u_0 do problema homogeneizado quando $\varepsilon \to 0$ com relação a certa norma. O lema a seguir garante a existência de soluções 1-periódicas da sequência de problemas:

Lema (BAKHLOV; PANASENKO, 1989): Sejam $a(y)$, $F_0(y)$ e $F_1(y)$ diferenciáveis por partes, com $a(y)$ 1-periódica, positiva, limitada. Então:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dy}\left[a(y)\dfrac{dN}{dy}\right] = F_0(y) + \dfrac{dF_1}{dy}; \quad y \in (0,1) \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_p\} \equiv \Gamma \\ \left[\!\left[a(y)\dfrac{dN}{dy} - F_1(y) \right]\!\right]_{y=y_j} = 0; \quad j = 1,2,\dots,p \\ a_j \dfrac{dN^j}{dy} - F_1^{(j)} = (-1)^j \beta [\![N]\!]_{y=y_j}; \quad j = 1,2,\dots,p \end{cases}$$

tem solução $N(y)$ 1-periódica se e somente se $\langle F_0 \rangle = 0$. ■

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Consideramos a seguinte expansão assintótica da solução do problema:

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y), y = x/\varepsilon.$$

Na substituição de $u^{(2)}$ no problema (1), utilizamos a regra da cadeia:

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} \approx \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}$$

A partir daqui, x e y consideram-se independentes. Agrupando por potências de ε o resultado da substituição em $(1)_1$ obtém-se a igualdade assintótica

$$\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] + \varepsilon^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]\right\} \\ + \varepsilon^0\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right] - f\right\} = O(\varepsilon)$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de ε^{-2}, ε^{-1} e ε^0 devem ser nulos:

$$\varepsilon^{-2}: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] = 0$$

$$\varepsilon^{-1}: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]$$

$$\varepsilon^0: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right] + f$$

Estas equações são complementadas com as condições de contato que resultam de substituir $u^{(2)}$ em $(1)_{2,3}$ e condições para garantir a unicidade. Utilizando $(1)_2$:

$$\varepsilon^{-1}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}+\beta[\![u_0]\!]\right]+\varepsilon^0\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)+\beta[\![u_1]\!]\right] + \varepsilon\left[a(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+\beta[\![u_2]\!]\right]+O(\varepsilon^2)=0$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de ε^{-1}, ε^0 e ε devem ser nulos, de onde:

$$\varepsilon^{-1}\colon a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}=-\beta[\![u_0]\!];\ \varepsilon^0\colon a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=-\beta[\![u_1]\!];\ \varepsilon\colon a(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=-\beta[\![u_2]\!]$$

Utilizando $(1)_3$:

$$\varepsilon^{-1}\left[\!\!\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]\!\!\right]+\varepsilon^0\left[\!\!\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]\!\!\right]+\varepsilon\left[\!\!\left[a(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right]\!\!\right]+O(\varepsilon^2)=0$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de ε^{-1}, ε^0 e ε devem ser nulos, de onde:

$$\varepsilon^{-1}\colon\left[\!\!\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]\!\!\right]=0;\ \varepsilon^0\colon\left[\!\!\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]\!\!\right]=0;\ \varepsilon\colon\left[\!\!\left[a(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right]\!\!\right]=0$$

Portanto, teremos os seguintes problemas para os coeficientes de $u^{(2)}$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\dfrac{\partial u_0}{\partial y}\right]=0,\ y\in(0,1)\backslash\Gamma\\ a(y)\dfrac{\partial u_0}{\partial y}=-\beta[\![u_0]\!],\ y\in\Gamma\\ \left[\!\!\left[a(y)\dfrac{\partial u_0}{\partial y}\right]\!\!\right]=0,\ y\in\Gamma\\ u_0=0,\ y\in\{0,1\}\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right]=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\dfrac{\partial u_0}{\partial y}\right]-\dfrac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right],\ y\in(0,1)\backslash\Gamma\\ a(y)\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right)=-\beta[\![u_1]\!],\ y\in\Gamma\\ \left[\!\!\left[a(y)\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right]\!\!\right]=-\left[\!\!\left[a(y)\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right]\!\!\right],\ y\in\Gamma\\ u_1=0,\ y\in\{0,1\}\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right]=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right]-\dfrac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right]-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right]+f,\ y\in(0,1)\backslash\Gamma\\ a(y)\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right)=-\beta[\![u_2]\!],\ y\in\Gamma\\ \left[\!\!\left[a(y)\dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right]\!\!\right]=-\left[\!\!\left[a(y)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right]\!\!\right],\ y\in\Gamma\\ u_2=0,\ y\in\{0,1\}\end{cases}\tag{4}$$

Utilizando as informações a seguir para podermos aplicar o lema em (2)-(4):

- $N \equiv u_0,\ F_0 \equiv 0,\ F_1 \equiv 0 \Longrightarrow \langle F_0 \rangle = 0 \Longrightarrow \exists u_0$ 1-periódica solução de (2)
- $N \equiv u_1,\ F_0 = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right],\ F_1 = -a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x} \Longrightarrow \exists u_1$1-periódica solução de (3) $\Leftrightarrow\ \langle\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]\rangle = 0$
- $N \equiv u_2,\ F_0 = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] + f,\ F_1 = -a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x} \Longrightarrow \exists u_2$1-periódica solução de (4) $\Leftrightarrow\ \langle -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] + f \rangle = 0$

Assim, de aplicar o Lema tem-se que:

- de (2): $u_0 = u_0(x)$ (independência da variável local y do primeiro termo da assintótica)
- de (3): $u_1(x,y) = \begin{cases} N_1^{(1)}(y)\frac{du_0}{dx},\ y \epsilon\ (0, y_1) \\ N_1^{(2)}(y)\frac{du_0}{dx},\ y \epsilon\ (y_1, y_2\ ) \\ N_1^{(3)}(y)\frac{du_0}{dx},\ y \epsilon\ (y_2, 1\ ) \end{cases}$ (solução do problema local)
    - $N_1^{(j)}(y) = C_1^{(j)}y + C_2^{(j)},\ j = 1{,}2{,}3$ (função local)
    - $\hat{a} = \langle a\ (y)\frac{dN_1}{dy} + a(y)\rangle\ = \left(a_1C_1^{(1)} + a_1\right)(1 + y_1 - y_2) + (a_2C_1^{(2)} + a_2)(y_2 - y_1)$(coeficiente efetivo)
- de (4): (problema homogeneizado)

$$\begin{cases} \hat{a}\dfrac{d^2u_0}{dx^2} = f, x \in (0{,}1) \\ u_0 = 0, x \in \{0{,}1\} \end{cases}$$

Em muitas situações é suficiente considerar a expansão assintótica de primeira ordem $u^{(1)}(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1(x/\varepsilon)u_0'(x)$.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho aplicou-se o método de homogeneização assintótica a um problema unidimensional de contorno com contato imperfeito. Este trabalho é uma introdução para proporcionar a autora a adquirir pré-requisitos necessários para dar seguimento ao estudo do método de homogeneização assintótica. A continuidade da pesquisa estará em ilustrar e provar o método de homogeneização para o caso do contato imperfeito.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.