UMA INTRODUÇÃO A TEORIA DE MÓDULOS.

C. GARCIA, Christian M.[1]; MORGADO, Andrea[2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas– chrismic@uol.com.br*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – andrea.morgado@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A teoria de módulos é uma generalização da teoria de espaços vetoriais, já que consideramos um conjunto não vazio M munido de uma operação de soma $+: M \times M \to M$ e uma multiplicação por escalar $\cdot : A \times M \to M$, tal que A é um anel, diferentemente da noção de espaço vetorial onde consideramos um corpo para a multiplicação por escalar (ver Definição 3.1).

Neste novo contexto alguns resultados importantes da Álgebra Linear podem ser generalizados. Com isso, o presente trabalho tem por objetivo dar uma introdução à teoria de módulos, com as principais definições, alguns resultados e exemplos. Neste aspecto, vamos expor algumas compatibilidades entre módulos e espaços vetoriais, deixando claro que ao enfraquecer a hipótese, considerando um anel, alguns resultados já não são mais válidos. Vamos abordar uma generalização para o caso de módulos de um teorema clássico da Álgebra Linear, conhecido como *Teorema do Núcleo e da Imagem* (ver [HK, página 71]).

Este trabalho foi desenvolvido no projeto de pesquisa ‘’Iniciação Científica em Tópicos de Álgebra’’, o qual teve início no primeiro semestre de 2015. Inicialmente, o grupo envolvido no projeto trabalhou com *teoria de categorias* [M], a qual é uma poderosa linguagem que posteriormente deu suporte aos estudos de *teoria de módulos.* Como uma aplicação, o próximo enfoque do grupo foi estudar o *Teorema de Wedderbburn-Artin* (ver [S], Teorema 3.2.9). Este resultado nos fornece uma importante classificação dos anéis semissimples, e a construção de sua demonstração é embasada na linguagem de módulos, já que todo anel é um módulo à esquerda e a direita sobre si mesmo.

2. METODOLOGIA

A metodologia utilizada consiste em encontros semanais com a professora orientadora, onde os estudos realizados pelos discentes são apresentados em formato de seminário. Nestes encontros são discutidos temas referentes à teoria, dúvidas, exercícios, entre outros.

Os tópicos estudados possuem duas referências principais que são ‘’An Introduction to Homological Álgebra’’ [R] e ‘’Uma Introdução ao estudo dos anéis semissimples’’ [S]. Com objetivo de complementar estas referências são realizadas pesquisas em livros, teses, jornais e revistas na área de Álgebra Abstrata.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como já mencionado, a teoria de módulos é uma generalização da teoria de espaços vetoriais. Os resultados acerca de módulos dessa seção são conhecidos da literatura e podem ser encontrados em [R]. Todos os anéis considerados neste trabalho possuem unidade.

Definição 3.1: Sejam R um anel e M um grupo abeliano. Dizemos que M é um R-módulo à esquerda, se existir uma multiplicação por escalar $\cdot : R \times M \to M$ (chamada de ação de R em M) que associa para cada par (r, m) um elemento $rm \in M$, de forma que para quaisquer $m, m' \in M$ e $r, r' \in R$, são válidas as propriedades:

(i) $r(m + m') = rm + rm'$;

(ii) $(r + r')m = rm + r'm$;

(iii) $(rr')m = r(r'm)$;

(iv) $1m = m$.

De forma análoga, podemos definir um R-módulo à direita M, onde a multiplicação por escalar é dada por $\cdot : M \times R \to M$, que associa para cada par (m, r) um elemento $mr \in M$ satisfazendo propriedades análogas a Definição 3.1 com as devidas adaptações. Note que se R é um anel comutativo, então todo R-módulo à esquerda também é R-módulo à direita e vice-versa. A seguir veremos alguns exemplos.

Exemplo 3.2: Um espaço vetorial V sobre um corpo K é um K-módulo à esquerda e à direita com sua própria estrutura.

Exemplo 3.3: Todo grupo abeliano $(G,*)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo à esquerda com ação dada $\cdot : \mathbb{Z} \times G \to G$ que associa para cada par (n, g) o elemento:

$$ng = \begin{cases} g * g * \dots * g \ (n \text{ vezes}), & \text{se } n > 0 \\ e, \ \text{se } n = 0 \ \text{ tal que } e \in G \text{ é elemento neutro} \\ (g^{-1})^{-n}, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Vejamos mais algumas definições, que vem de maneira natural quando definimos uma nova estrutura algébrica.

Definição 3.4: Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda. Dizemos que um subconjunto não vazio $N \subset M$ é um R-submódulo à esquerda de M se N é um subgrupo de M e a ação $\cdot : R \times M \to M$ restrita a N induz uma estrutura de R-módulo à esquerda em N.

Definição 3.5: Sejam R um anel, M um R-módulo à esquerda e N um R-submódulo de M, chamamos de módulo quociente o grupo quociente $M/_N$ munido com a multiplicação por escalar $\cdot : R \times M/_N \to M/_N$ que associa para cada par $(r, \overline{m})$ o elemento $\overline{rm} \in M/_N$.

Na definição acima, é facilmente demonstrado que a multiplicação por escalar está bem definida. É natural que ao estudarmos a generalização de uma teoria procuremos resultados análogos desta. Assim sendo, definimos comprimento de um módulo, o qual servirá como base de algumas generalizações importantes.

Definição 3.6 [S, página 32]: Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda. Consideremos as cadeias estritamente decrescentes de R-submódulos à esquerda de M:

$$\mathcal{C}: M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_r = 0$$

e

$$\mathcal{C}': M = M'_0 \supset M'_1 \supset M'_2 \supset \cdots \supset M'_t = 0$$

Dizemos que:

(i) $\mathcal{C}'$ é um *refinamento* de $\mathcal{C}$, se todo membro de $\mathcal{C}$ aparece em $\mathcal{C}'$;

(ii) A cadeia $\mathcal{C}$ é uma série de composição de M, se cada módulo quociente M_i/M_{i+1} $(0 \leq i \leq r-1)$ não possuir submódulos não triviais, ou seja, $\mathcal{C}$ não pode ser propriamente refinada;

(iii) O módulo M tem um *comprimento* r, denotado por $\ell(M) = r$, se M possui uma série de composição com r inclusões estritas;

(iv) As cadeias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são *equivalentes*, e denotaremos $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}'$, se $r = t$ e, após uma reordenação dos índices, se necessário, temos $M_i/M_{i+1} \simeq M'_i/M'_{i+1}$.

A boa definição de (iii) pode ser visto em [S, página 33]. Observemos que se K é um corpo e V é um K-espaço vetorial de dimensão n com base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, então

$$V = V_0 = \sum_{i=1}^{n} Kv_i \supset V_1 = \sum_{i=2}^{n} Kv_i \supset \cdots \supset V_{n-1} = Kv_n \supset V_n = 0$$

é uma série de composição de V. Portanto, um K-espaço vetorial de dimensão n tem comprimento n.

Outra generalização importante se dá ao definirmos homomorfismo de R-módulos, que coincidira com a definição de transformação linear, quando os módulos em questão forem espaços vetoriais.

Definição 3.7: Sejam R um anel e M, N R-módulos à esquerda. Dizemos que uma função $f: M \to N$ é um homomorfismo de R-módulos (ou R-homomorfismo), se:

(i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, para quaisquer $m_1, m_2 \in M$;

(ii) $f(rm) = rf(m)$, para quaisquer $r \in R$ e $m \in M$.

Se o homomorfismo $f: M \to N$ é também uma bijeção, dizemos que f é isomorfismo. Neste ponto, vale ressaltar que o comprimento de um módulo não se comporta em geral da mesma forma que a dimensão de um espaço vetorial. Seguindo [HK] se K é um corpo, dados dois K-espaços vetoriais de mesma dimensão, estes são sempre isomorfos, o que não ocorre para módulos de comprimento finito, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.8 [S, página 36]: Considere $C_4 =< c: c^4 = e >$ um grupo cíclico de ordem quatro e $G =< g, h: g^2 = h^2 = (gh)^2 = e >$ o grupo de Klein. Pelo Exemplo 3.3, segue que C_4 e G são $\mathbb{Z}$-módulos. Temos que $\ell(C_4) = 4 = \ell(G)$, porém C_4 e G não são isomorfos.

Com estas definições poderemos mostrar o seguinte teorema, o qual é o objetivo deste trabalho.

Teorema 3.10 [S, página 34]: Sejam R um anel, M um R-módulo à esquerda e N um R-submódulo de M. Então $\ell(M)$ é finito se, e somente se, $\ell(N)$, $\ell({}^{M}/_{N})$ é finito. Neste caso, temos $\ell(M) = \ell(N) + \ell({}^{M}/_{N})$.

Deste segue o seguinte coroário:

Corolário 3.11 [S, página 35]: Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda com comprimento finito. Então:

(i) Se M_1, M_2 são submódulos de M, temos

$$\ell(M_1 + M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2) - \ell(M_1 \cap M_2)$$

(ii) Se $\varphi: M \to N$ é um R-homomorfismo, temos

$$\ell(Ker(\varphi)) + \ell(Im(\varphi)) = \ell(M).$$

Em particular, se $T: V \to W$ é uma transformação linear entre K-espaços vetoriais, então T é um K-homomorfismo. Logo, pelo Corolário 3.11(ii), segue que $\ell(Ker(T)) + \ell(Im(T)) = \ell(V)$. Como foi mencionado, o comprimento de um espaço vetorial é a dimensão desse espaço, ou seja, $\dim_K Ker(T) + \dim_K Im(T) = \dim_K V$. Sendo assim, o corolário acima generaliza o Teorema do Núcleo e da Imagem (ver [HK, página 71].

4. CONCLUSÕES

Com os estudos realizados até o momento foi possível verificar que a teoria de módulos é uma importante generalização do conceito de Espaços Vetoriais. Também é uma importante ferramenta para o estudo de outras estruturas como anéis e grupos abelianos. É importante salientar que o envolvimento dos discentes permite aos mesmos se familiarizarem com pesquisas na área de Matemática, dessa forma gerando um melhor compreendimento das construções teóricas em Matemática Pura e dando aos mesmos habilidades e métodos necessários ao futuro pesquisador.

Foi apresentado o trabalho ''Uma Introdução a Teoria de Categorias'' apresentado no XXIV congresso de Iniciação Cientifica da UFPel e na 14ª Mostra da Produção Universitária da FURG, Houve também uma apresentação de divulgação do projeto na XVII Semana Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[R] ROTMAN,J.J. **An Introduction to Homological Álgebra**. New York: Springer, 2009.

[S] SANTANA, A.A. **Uma Introdução ao estudo dos anéis semissimples**. UFRGS. Acessado em 24 jul. 2016. Online. Disponível em: http://www.sbm.org.br/coloquio-sul-4/material-dos-minicursos/

[HK] HOFFMAN,K. e KUNZE,R. **Álgebra Linear**. São Paulo: Polígono S.A., 1970.

[M] MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematician.** New York: Springer, 1971.