COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DE DOIS ESPAÇOS E DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MEIOS LOCALMENTE PERIÓDICOS.

DAIANE FRIGHETTO FRIGHETTO[1]; JONATHAN BRUM LAUZ[2]; NOÉ FRANCO DE JESUS[3]; RAFAELA SEHNEM[4]; JULIÁN BRAVO CASTILLERO[5]; LESLIE D. P. FERNÁNDEZ[6]

[1]*Universidade Federal de Pelotas, PPGMMat –daiane.frighetto@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas, PPGMMat – jonathan.brum.Lauz@hotmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas, PPGEMMat –noefrancode@gmail.com*
[4]*Universidade Federal de Pelotas, PPGMMat – rafa-sehnem@hotmail.com*
[5]*Universidade de Havana, Cuba – jbravo@matcom.uh.cu*
[6]*Universidade Federal de Pelotas, PPGMMat – leslie.fernandez@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, comparam-se dois métodos de homogeneização matemática baseados na procura de uma solução assintótica formal (SAF) do problema de valores de contorno e iniciais com coeficientes rapidamente oscilantes que modela fenômenos físicos que ocorrem em meios heterogêneos que apresentam separação de escalas estruturais. Uma SAF é uma série assintótica em duas escalas em termos de potências do parâmetro geométrico pequeno $\varepsilon > 0$ que caracteriza a separação de escalas e cujos coeficientes são funções incógnitas que dependem da microescala. Assim, o problema original é desacoplado em uma sequência recorrente de problemas para se obter tais coeficientes (LIMA, 2016). A maioria dos métodos de homogeneização foi desenvolvida para meios com heterogeneidade periódica, dos quais apresentamos aqui o Método de Homogeneização Assintótica (MHA - BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Por outro lado, meios não periódicos são estudados tradicionalmente considerando uma amostra representativa replicada periodicamente, de modo que os métodos para meios periódicos podem ser empregados. Contudo, uma alternativa interessante quando tal aproximação não é possível é o Método de Dois Espaços (MDE - KELLER, 1980). Aqui, o MHA e MDE são aplicados a um meio unidimensional localmente periódico que representa um caso particular do que ocorre, por exemplo, em materiais cerâmicos e policristais.

2. METODOLOGIA

Considere a família de problemas com índice $\varepsilon > 0$ definida por

$$\frac{d}{dx}\left[k^{\varepsilon}(x)\frac{du^{\varepsilon}}{dx}\right] = f^{\varepsilon}(x), \tag{1}$$

$$x \in (0,1),\ u^{\varepsilon}(0) = 0,\ \left.\frac{du^{\varepsilon}}{dx}\right|_{x=1} = 0, \tag{2}$$

em que $k^{\varepsilon}(x) = k(x, x/\varepsilon)$ é diferenciável, positiva e limitada, 1-periódicas em $y = x/\varepsilon$, e $f^{\varepsilon}(x) = f(x, x/\varepsilon)$ é contínua. Na sua forma clássica, o MHA e o MDE procuram uma SAF do problema (1)-(2) como $u^{\varepsilon}(x) \approx u_0(x,y) + \varepsilon\, u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) + O(\varepsilon^3)$, sendo as funções diferenciáveis incógnitas $u_k(x,y)$ 1-periódicas em y no MHA e apenas limitadas no MDE. Observa-se que o primeiro termo da SAF $u_0(x,y)$ é uma boa aproximação da solução exata $u^{\varepsilon}(x)$ do problema (1)-(2) quando ε é suficientemente pequeno.

Ambos os métodos fornecem a mesma sequência recorrente de equações para as $u_k(x,y)$:

$$\varepsilon^{-2}: L_{yy}u_0 = 0 \tag{3}$$

$$\varepsilon^{-1}: -L_{yy}u_1 - L_{xy}u_1 - L_{yx}u_0 = 0 \tag{4}$$

$$\varepsilon^{-1}: -L_{yy}u_2 - L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 - L_{xx}u_0 + f(x) = 0 \tag{5}$$

onde $L_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$, $\alpha, \beta \in \{x,y\}$, é um operador diferencial. Ainda, a SAF é substituída nas condições de contorno para se obter condições para as $u_k(x,y)$.

O seguinte Lema é um importante resultado para construir a SAF do problema (1)-(2) via o MHA.

Lema *(BAKHVALOV; PANASENKO, 1989):* Sejam $f(y)$ e $k(y)$ funções diferenciáveis e 1-periódicas com $k(y)$ positiva e limitada. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica N da equação $L_{yy}N = F(y)$ com é que $\int_0^1 F(y)dy = 0$.

Aplicando o lema a (3)-(5) com as condições correspondentes obtém-se que $u_0(x,y) = u_0(x)$, $u_1(x,y) = N_1(y)\frac{du_0}{dx}$ e $u_2(x,y) = N_2(y)\frac{d^2u_0}{dx^2}$, em que $u_0(x)$ é a solução do problema homogeneizado dado pela equação $\frac{d}{dx}\left[k_0(x)\frac{du_0}{dx}\right] = f_0(x)$, $x \in (0,1)$, com $k_0(x) = \left(\int_0^1 \frac{dy}{k(x,y)}\right)^{-1}$ e $f_0(x) = \int_0^1 f(x,y)dy$, e as condições de contorno $u_0(0) = 0$, $\left.\frac{du_0}{dx}\right|_{x=1} = 0$, e as funções locais $N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{k_0(x)}{k(x,s)} - 1\right)ds$, $N_2(y) = \int_0^y \left(\frac{k_0(x)}{k(x,s)}\int_0^1 N_1(t)dt - N_1(s)\right)ds$.

Por outro lado, pelo MDE encontram-se as funções incógnitas $u_k(x,y)$ como segue. A equação (3) é da forma $\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) = 0$. Integrando duas vezes de y_0 até y temos

$$u_0 = u_0(x,y_0) + k(x,y_0)\left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{y=y_0} \int_{y_o}^{y} \frac{ds}{k(x,s)} \tag{6}$$

Multiplicando a equação (6) por $\frac{1}{y-y_0}$ e passando ao limite quando $y \to \infty$ temos $\left.\frac{du_0}{dx}\right|_{y=y_0} = 0$, que vale para qualquer $y_0 \in (0,+\infty)$ e, portanto, vale também para todo y, ou seja, u_0 não depende de y:

$$u_0(x,y) = u_0(x) \tag{7}$$

A equação (4) é da forma

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial y}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] \tag{8}$$

Podemos simplificar a equação (8) substituindo (7) e obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] = -\frac{\partial k}{\partial y}\frac{du_0}{dx} \tag{9}$$

Seguidamente, integramos (9) duas vezes de y_0 até y, multiplicamos por $\frac{1}{y-y_0}$ e calculamos o limite quando $y \to \infty$. Obtemos:

$$\left[k\,(x,y)\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=y_0} + k(x,y_0)\frac{du_0}{dx}\right]\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_o}^{y}\frac{ds}{k(x,s)} = \frac{du_0}{dx} \tag{10}$$

Se $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_o}^{y}\frac{ds}{k(x,s)}$ existe, então consideramos que:

$$k_0(x)^{-1} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y-y_0} \int_{y_o}^{y} \frac{ds}{k(x,s)} \tag{11}$$

Assim:

$$\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\bigg|_{y=y_0} + k(x,y_0)\frac{du_0}{dx}\right] k_0(x)^{-1} = \frac{du_0}{dx} \tag{12}$$

Multiplicando a equação (12) por $k_0(x)$ e analisando que se vale para qualquer y_0 então vale para todo y, temos:

$$k\,(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} = -k\,(x,y)\frac{du_0}{dx} + k_0(x)\frac{du_0}{dx} \tag{13}$$

Por fim, trabalharemos com a equação (5).

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + f(x,y) \tag{14}$$

Note que podemos simplificar (14) utilizando os resultados anteriores calculados em (7) e (13), assim restamos com:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[k\,(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y} + k(x,y_0)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right] = -\frac{d}{dx}\left[k_0(x)\frac{du_0}{dx}\right] + f(x,y) \tag{15}$$

Integrando (15) de y_0 até y duas vezes, multiplicando por $\frac{1}{y-y_0}$ e calculando o limite quando $y \to \infty$, obtemos:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y-y_0} \int_{y_o}^{y} f(x,s)\,ds = \frac{d}{dx}\left[k_0(x)\frac{du_0}{dx}\right] \tag{16}$$

Se $\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y-y_0}\int_{y_o}^{y} f(x,s)\,ds$ existe, então consideramos que:

$$f_0(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y-y_0} \int_{y_o}^{y} f(x,s)\,ds \tag{17}$$

Portanto temos novamente a equação do Problema Homogeneizado:

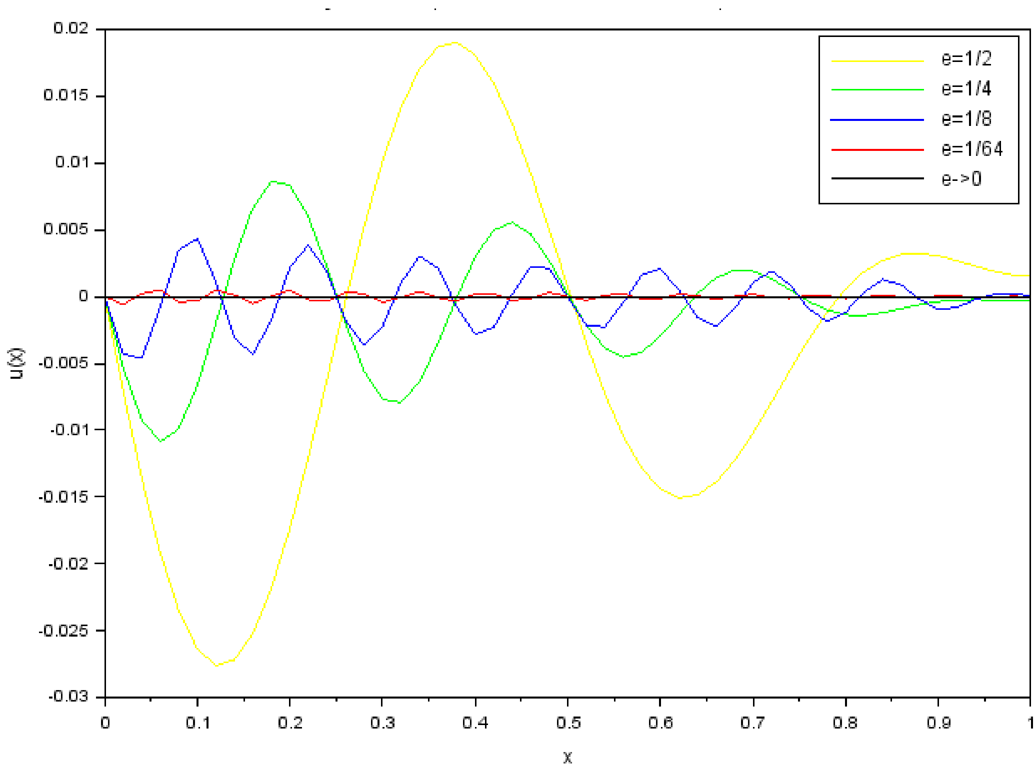
$$\frac{d}{dx}\left[k_0(x)\frac{du_0}{dx}\right] = f_0(x) \tag{18}$$

Assim, pode-se notar que a forma do problema homogeneizado dos métodos estudados é o mesmo. De fato, pode-se provar que em presença de periodicidade, os limites em (11) e (17) resultam exatamente no obtido via o MHA.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Sejam as funções $k\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) = \left(1+\frac{x}{4}sen\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)^{-1}$ e $f\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{4}cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)$ para calcular $k_0(x)$, e $f_0(x)$ de acordo com cada método estudado. A solução exata do problema original é $u^{\varepsilon}(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\int_1^s cos\left(\frac{2\pi t}{\varepsilon}\right)dt}{\left(1+\frac{s}{4}sen\left(\frac{2\pi s}{\varepsilon}\right)\right)}ds$. O problema homogeneizado encontrado nos dois métodos é dado por $k_0(x) = \langle k^{-1}(x,y)\rangle^{-1} = 1$ e $f_0(x) = \langle f(x,y)\rangle = 0$ pelo MHA, e $k_0(x) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_0}^{y}\frac{ds}{k(x,s)}\right)^{-1} = 1$ e $f_0(x) = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y-y_0}\int_{y_0}^{y} f(x,s)ds = 0$ pelo MDE. Logo, se obtém a mesma solução

$u_0(x) = 0$. Na seguinte figura, ilustra-se a proximidade de $u^{\varepsilon}(x)$ a $u_0(x)$ quando ε é suficientemente pequeno.



4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos o desenvolvimento e a aplicação de dois métodos de homogeneização matemática para meios localmente periódicos. Ilustrou-se através de um exemplo a proximidade da solução exata do problema original com a solução do problema homogeneizado associado.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao projeto CAPES nº 88881.030424/2013-01 e seu apoio financeiro.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

LIMA, Marcos Pinheiros de. **Homogeneização matemática de meios-heterogêneos com estrudturas periódica.** 2016. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

KELLER, Joseph B. Darcy's law for flow in porous media and the two-space method. In: **CONFERENCE ON NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ENGINEERING AND APPLIED SCIENCE**, Rhode Island, 1979. Nonlinear Partial Differential Equations In Engineering And Applied Science, New York: Marcel Dekker, INC, 1980. p.429-443.