TÓPICOS DE GEOMETRIA EM DIMENSÃO 2

JULIANA BORGES PEDROTTI[1]; GIOVANNI DA SILVA NUNES[2]

[1]Universidade Federal de Pelotas – julianabpedrotti@gmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – giovanni.nunes@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

O conceito de geometria estabelecido pelo conjunto de axiomas, conforme formulado por Euclides em sua obra *Os Elementos*, fez com que fossem deduzidos e formalizados diversos resultados da geometria. Dentre o conjunto de cinco axiomas proposto por Euclides, o quinto deles, conhecido como o axioma das paralelas, afirma que: "Por um ponto P não pertencente a uma reta r passa uma única reta paralela à r". Este axioma despertou interesse de vários matemáticos, pois muitos acreditavam que ele deveria ser demonstrado a partir dos outros axiomas, podendo ser então enunciado como um teorema e não um axioma.

No decorrer dos séculos XVII e XVIII, muitos geômetras estavam interessados no problema do postulado das paralelas. Em 1817, Gauss estava convencido que o axioma das paralelas de Euclides era independente dos outros postulados, e por volta de 1823, Janós Bolyai disse ter descoberto uma geometria não-euclidiana. Foi então publicado, em 1829, o trabalho de Nikolai Lobachevsky sobre a descoberta da geometria não-euclidiana. A contribuição de Bolyai e de Lobachevsky foi descobrir que era possível alterar o axioma das paralelas de Euclides sem que uma contradição fosse criada com os outros axiomas.

Um matemático importante para o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas foi Bernhard Riemann. A grande contribuição de Riemann foi introduzir o conceito do que denominamos, nos dias de hoje, de métrica riemanniana. A métrica riemanniana vem a ser o objeto fundamental numa geometria, ela possibilita definir o comprimento de uma curva e área de uma região contidas em uma superfície.

O desenvolvimento da geometria, mesmo que de uma forma não muito evidente, sempre contou com o auxílio da Teoria de Grupos. Neste trabalho, temos por principal objetivo, no primeiro momento, evidenciar contribuições da Teoria de Grupos em resultados que introduzem algumas ideias de geometria riemanniana em dimensão 2. Apresentaremos também alguns tópicos de Álgebra Linear necessários para o entendimento do conceito de métrica riemanniana.

2. METODOLOGIA

Este trabalho tem como metodologia estudos em livros e artigos, com exposição dos tópicos estudados em encontros semanais junto ao professor orientador.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A métrica riemanniana é uma estrutura fundamental no estudo da geometria, com uma tal métrica pode-se determinar o comprimento de curvas, a área de regiões e definir ângulos. Antes de apresentar a definição de métrica riemanniana, lembremos a definição do produto interno:

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $u, v \in V$. Chamamos de produto interno uma aplicação $<.,.> : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $u, u', v, v' \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfaça:

(i) Bilinearidade: $< u + u', v > = < u, v > + < u', v >$, $< \alpha u, v > = \alpha < u, v >$, $< u, v + v' > = < u, v > + < u, v' >$, $< u, \alpha v > = \alpha < u, v >$;
(ii) Simetria: $< u, v > = < v, u >$;
(iii) Positividade: $< u, u > \geq 0$, e $< u, u > = 0 \iff u = 0$.

Em particular, se $V = \mathbb{R}^2$ e $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por:

$$< u, v > = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, ao qual chamamos de produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^2$.

Temos ainda que um produto interno induz uma norma em V, através da aplicação $|\cdot| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $|u| = \sqrt{< u, u >}$. No caso do produto interno euclidiano, obtemos a norma euclidiana.

Vejamos agora, como generalizar o conceito de produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^2$.

Será útil para efeito de cálculos, denotar um elemento $u \in \mathbb{R}^2$ como uma matriz coluna de tamanho 2×1, enquanto que u^t denota a matriz transposta de u, de tamanho 1×2, e usaremos $\cdot$ para denotar o produto usual de matrizes.

Considere então a matriz,

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

onde $g_{11} > 0, g_{22} > 0$ e $\det(g) > 0$. Desta forma, g define um produto interno em $\mathbb{R}^2$ através da expressão

$$g(u, v) = u^t . \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} . v = < u, g . v >$$

Analogamente, associamos ao produto interno $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a norma $|\cdot|_g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $|u|_g = \sqrt{g(u, u)}$.

A seguir, iremos introduzir o conceito de plano tangente, ao qual será fundamental para o estudo das geometrias não-euclidianas.

Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, o plano tangente ao $\mathbb{R}^2$ em p, é o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^2$ tais que existe uma curva $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujas condições iniciais são $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, e denotamos $T_p\mathbb{R}^2$.

Com isso, definimos uma métrica riemanniana sobre $\mathbb{R}^2$ como sendo uma aplicação que para cada $p \in \mathbb{R}^2$ associa um produto interno

$$g(p): T_p\mathbb{R}^2 \times T_p\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dado por } g(u, v)_p = < u, g(p) . v >$$

onde a dependência em relação à p é diferenciável.

A partir da métrica riemanniana, obtemos métricas em que o comprimento do vetor depende do ponto, como por exemplo, a métrica hiperbólica e esférica. Além disso, podemos calcular comprimentos de curvas em métricas distintas, e estudar o comportamento dessas curvas em espaços não-euclidianos.

A Teoria de Grupos e Ações de Grupos, são ferramentas de grande importância para estudar ações geométricas sobre espaços topológicos. Então, lembremos alguns exemplos importantes de grupos:

1. Grupo das Rotações em $\mathbb{R}^2$.

Uma rotação em $\mathbb{R}^2$ é uma transformação linear $R_\theta: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação a base canônica de $\mathbb{R}^2$ é:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

A multiplicação de matrizes de rotação satisfaz a identidade $R_\theta . R_\omega = R_{\theta+\omega}$. Por isto, o conjunto $SO_2 = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo.

2. Grupo Ortogonal de $\mathbb{R}^3(O_3)$ e Grupo Ortogonal Especial de $\mathbb{R}^3(SO_3)$.

Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que preserva o produto interno euclidiano de $\mathbb{R}^3$, ou seja, $< T(u), T(v) > = < u, v >$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$. Segue então que,

$$< u, T^*T(u) > = < u, v > \Longrightarrow T^*T = I,$$

onde T^* denota a adjunta da transformação linear T.

O conjunto dessas transformações, denominadas por O_3, formam um grupo com a multiplicação de matrizes. A identidade $T^*T = I$, implica em $|\det(T)| = 1$, assim definimos o conjunto das matrizes ortogonais especiais como

$$S0_3 = \{T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \det(T) = 1\}$$

denominado de grupo de rotações de $\mathbb{R}^3$.

Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e G um grupo. Dizemos que uma aplicação diferençável $\varphi: G \times \Omega \longrightarrow \Omega$ é uma ação à esquerda de G em Ω se satisfaz:

(i) $\varphi(e, x) = x$ para todo $x \in \Omega$;

(ii) $\varphi\big(g, \varphi(h, x)\big) = \varphi(gh, x)$ para todo $g, h \in G$ e $x \in \Omega$.

Utilizaremos a notação $gx := \varphi(g, x)$.

Além disso, se Ω é um espaço topólogico, dizemos que φ é uma ação livre, se para quaisquer $g \neq e$ e $x \in \Omega$, tem-se $gx \neq x$.

Definiremos agora alguns conjuntos que para o estudo de ações de grupos são fundamentais.

Seja $x \in \Omega$. Dizemos que o conjunto:

$$\mathcal{O}_x = \{gx \mid g \in G\}$$

é a órbita do elemento x. Se em Ω, consideramos a relação de equivalência:

$$y \sim x \Leftrightarrow \exists\, g \in G \mid y = gx,$$

podemos considerar o espaço quociente ${}^{\Omega}/_{G} = \{\, \mathcal{O}_x \mid x \in \Omega\}$, ou espaço das órbitas.

Além disso, dizemos que o subgrupo de isotropia de um elemento $x \in \Omega$ é,

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

Podemos destacar alguns exemplos importantes de ações de grupo sobre um espaço topológico, como a ação de $S0_2$ e $S0_3$ sobre a esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. A partir desses exemplos, podemos listar as diferenças entre as duas ações, obter uma interpretação geométrica sobre elas e determinar os subgrupos de isotropia.

4. CONCLUSÕES

Apesar dos conceitos que foram desenvolvidos nesse trabalho não serem abordados na graduação, podemos concluir que este estudo foi importante para introduzir de forma natural os conceitos de geometria riemanniana em dimensão 2.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 8 ed.

TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008. 2 ed.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra.** Elementos de Matemática. IMPA, 1969.

UFSC. **Doria, Celso Melchiades - Geometria em Dimensão 2**. Santa Catarina, 2011**.** Acessado em 11 maio. 2016. Online. Disponível em: http://mtm.ufsc.br/~cmdoria/disciplinas/GeomDif-MTM/livros-artigos/CelsoMelchDoria-livro.pdf