PARAMETRIZAÇÕES DAS CURVAS OBTIDAS ATRAVÉS DO ESPIRÓGRAFO

MUNIQUE DOS SANTOS LIMA[1]; LISANDRA SAUER[2]

[1]*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – munique.lima@hotmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – lisandra.sauer@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em deduzir as equações paramétricas das curvas hipotrocóides, obtidas através do Espirógrafo. A parametrização de uma curva, segundo VILCHES; CORRÊA consiste em descrever o seu trajeto em função de um intervalo de tempo, ou seja, precisamos determinar as coordenadas de um ponto da curva em função de um parâmetro.

Em alguns documentos oficiais e também em relógios podemos encontrar curvas muito parecidas com as que estudamos aqui, elas são muito difíceis de se reproduzir e atuam para dificultar a falsificação de documentos. As máquinas que produzem tais curvas chamam-se Guilloché, que é uma espécie de espirógrafo, com mais de duas roletas.

Vamos obter as equações paramétricas das curvas hipotrocóides e também apresentar alguns exemplos, como ANDRADE (2014).

2. METODOLOGIA

A metodologia utilizada consiste em pesquisas em livros, artigos e internet, o estudo e a realização do trabalho se deram através de seminários.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O espirógrafo foi criado pelo matemático Bruno Abdank Abakanowicz (1852 - 1900), mas como brinquedo foi elaborado em 1965 pelo engenheiro Denys Fisher (1918 - 2002), o brinquedo consiste em rolar um círculo dentado dentro de outra circunferência fixa de raio maior, a roda que se move possui vários furos, assim ao colocar a ponta de uma caneta em um desses orifícios e girar, desenham-se diversas curvas (Figura 1), essas são chamadas de hipotrocóides. As curvas variam de acordo com o tamanho da circunferência e do ponto escolhido para a caneta.

Figura 1: Espirógrafo

PARAMETRIZAÇÃO

Vamos determinar as equações paramétricas das curvas obtidas por meio do espirógrafo. Observando a Figura 2, tomamos um círculo de raio $r = \overline{CB}$ tangente interiormente a outro círculo de raio maior $R = \overline{OA} = \overline{OB}$. Consideramos a origem do sistema no centro O do círculo de raio maior.

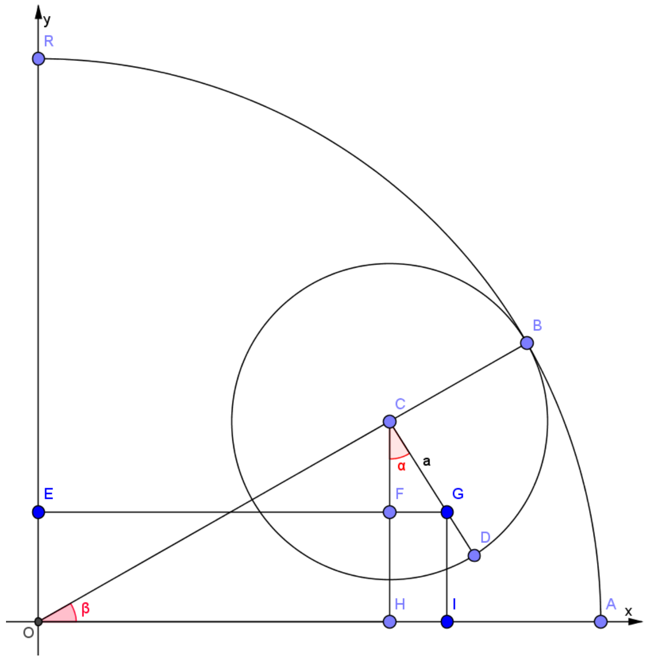

Figura 2

O círculo menor gira tangencialmente ao círculo maior e primeiramente, suponhamos que o círculo menor esteja com o centro no eixo Ox. Assim, para um instante β o arco BD mede o mesmo que o arco BA. Consideramos um ponto G no círculo menor, a a unidades de distância do seu centro e β o ângulo que $\overline{OC}$ forma com o eixo Ox. Note que, este ponto G corresponde ao furo escolhido no círculo menor.

Após fixar valores para r, R e a, vamos determinar as coordenadas de G em função de β, ou seja $G = (\,x(\beta), y(\beta))$. As coordenadas obtidas equivalem às equações paramétricas das curvas.

Observando a Figura 2, temos que $x(\beta) = \overline{OH} + \overline{HI} = \overline{OH} + \overline{FG}$ e $y(\beta) = \overline{IG} = \overline{HC} - \overline{FC}$. Como $\overline{OC} = \overline{OB} - \overline{CB},$ então $\overline{OC} = R - r$ e daí

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{OH}}{\overline{OC}} \text{ e } \sin(\beta) = \frac{\overline{HC}}{\overline{OC}}$$

$$\overline{OH} = \overline{OC}.\cos(\beta) = (R - r).\cos(\beta)$$

$$\overline{HC} = \overline{OC}.\sin(\beta) = (R - r).\sin(\beta)$$

Temos que $\overline{CG} = a$ e α é a medida do ângulo $F\hat{C}G$, então

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{FC}}{a} \rightarrow \overline{FC} = a.\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{FG}}{a} \rightarrow \overline{FG} = a.\sin(\alpha)$$

Agora, vamos estabelecer uma relação entre β e α. Temos que $\beta = \frac{BA}{R}$, logo $BA = \beta.R$ e como a qualquer momento BA pode medir o mesmo que BD, então $BA = \beta.R = BD$. A medida do ângulo $B\hat{C}D = \frac{BD}{r} = \frac{\beta.R}{r}$ radianos. A medida dos ângulos internos do triângulo retângulo OCH é

$$\beta + O\hat{C}H + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$O\hat{C}H \; = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta$$
$$O\hat{C}H \; = \frac{\pi}{2} - \beta \; radianos$$

O ângulo raso $\mathrm{O\hat{C}B}$ é igual à soma dos ângulos $\mathrm{O\hat{C}H}$, $\mathrm{F\hat{C}G}$ e $\mathrm{G\hat{C}B}$ e temos que $\mathrm{F\hat{C}G}$ = α e $\mathrm{G\hat{C}B} = \mathrm{B\hat{C}D}$ então

$$\mathrm{O\hat{C}B} = \mathrm{O\hat{C}H} + \mathrm{F\hat{C}G} + \mathrm{G\hat{C}B}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta.\left(1 - \frac{R}{r}\right)$$

Usando as fórmulas trigonométricas $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$, $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, temos:

$$\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{R}{r}\right)\beta\right) = \cos\left(\left(1 - \frac{R}{r}\right)\beta\right) =$$
$$\cos\left(-\left(1 - \frac{R}{r}\right)\beta\right) = \cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right)$$
$$x(\beta) = \overline{OH} + \overline{HI} = (R - r).\cos(\beta) + a.\sin(\alpha)$$
$$x(\beta) = (R - r).\cos(\beta) + a.\cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right)$$

e

$$\cos(\alpha) = \left(\frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{R}{r}\right)\beta\right) = -\sin\left(\left(1 - \frac{R}{r}\right)\beta\right) = \sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right)$$
$$y(\beta) = \overline{HC} - \overline{FC} = (R - r).\sin(\beta) - a.\cos(\alpha)$$
$$y(\beta) = (R - r).\sin(\beta) - a.\sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right)$$

Logo, obtemos as equações paramétricas que definem as curvas hipotrocóides, são $x(\beta) = (R - r).\cos(\beta) + a.\cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right)$ e $y(\beta) = (R - r).\sin(\beta) - a.\sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right)$.

PERIODICIDADE

Sabemos que as funções $\sin x$ e $\cos x$ são periódicas de período 2π. Logo, as curvas obtidas através do espirógrafo também são periódicas, pois elas se fecham. Temos $\cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right)$ e $\sin\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta\right)$ que tem período $p = 2\pi.\frac{1}{\frac{R}{r}-1} = 2\pi.\frac{r}{R-r}$. Vamos considerar dois casos: $\frac{R}{r}$ racional e irracional:

Se $\frac{R}{r}$ for racional, consideramos a forma irredutível de $\frac{R}{r} = \frac{s}{t}$, $s, t \in \mathbb{Z}$ e $t \neq 0$. Daí o quociente: $\frac{1}{\frac{R}{r}-1} = \frac{1}{\frac{s}{t}-1} = \frac{t}{s-t}$.

Mas $x(\beta)$ e $y(\beta)$ são uma soma de funções, logo seus períodos serão dados por $p = 2\pi t$. De fato:

Tome $\beta \in (0, 2\pi)$, temos que para $\beta_1 = \beta + 2\pi t$:

$\cos(\beta_1) = \cos(\beta + 2\pi t) = \cos(\beta).\cos(2\pi t) - \sin(\beta).\sin(2\pi t) = \cos(\beta)$

Então: $\cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)\beta_1\right) = \cos\left(\left(\frac{R}{r} - 1\right)(\beta + 2\pi t)\right) = \cos\left(\left(\frac{s}{t} - 1\right)\beta + \left(\frac{s}{t} - 1\right)2\pi t\right) = \cos\left(\left(\frac{s-t}{t}\right)\beta\right).\cos((s-t)2\pi) - \sin\left(\left(\frac{s-t}{t}\right)\beta\right).\sin((s-t)2\pi) = \cos\left(\left(\frac{s-t}{t}\right)\beta\right)$

Assim $x(\beta) = x(\beta_1)$ para $\beta_1 = \beta + 2\pi t$, para $y(\beta)$ procedemos de forma análoga. Logo, os períodos de $x(\beta)$ e $y(\beta)$ variam de $0 \leq \beta \leq 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e é o denominador de $\frac{R}{r}$ na sua forma irredutível. Se $\frac{R}{r}$ for irracional, a curva não se fechará.

EXEMPLOS

a. $R = 10, r = 7$ e $a = 5$; $0 \leq \beta \leq 14\pi$ (Figura 3) Observe que $\frac{10}{7}$ é racional.
$x(\beta) = 3.\cos(\beta) + 5.\cos\left(\frac{3}{7}\beta\right)$ e $y(\beta) = 3.\sin(\beta) - 5.\sin\left(\frac{3}{7}\beta\right)$

b. $R = 29, r = 20$ e $a = 8$; $0 \leq \beta \leq 40\pi$ (Figura 4)
$x(\beta) = 9.\cos(\beta) + 8.\cos\left(\frac{9}{20}\beta\right)$ e $y(\beta) = 9.\sin(\beta) - 8.\sin\left(\frac{9}{20}\beta\right)$

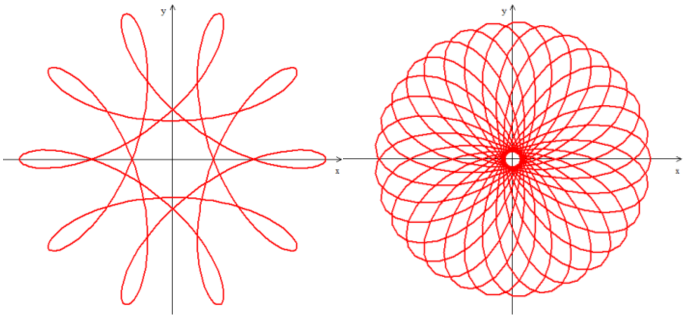

Figura 3 e 4, respectivamente

4. CONCLUSÕES

Com este trabalho iniciamos o estudo das curvas parametrizadas e vimos que é possível obter infinitos exemplos de curvas hipotrocóides. A partir de agora vamos seguir estudando o comprimento destas curvas e sua curvatura.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, L. N. Um brinquedo chamado espirógrafo. **RPM 60**, 2014.

DESAFIOS MATEMÁTICOS. **Espirógrafo**. Caxias do Sul, 19 jul. 2016. Acessado em 19 jul. 2016. Online. Disponível em: https://sites.google.com/site/desmatematicos/jogos/espirografo

ISTO É MATEMÁTICA. **O espirógrafo**. Youtube, Caxias do Sul, 19 jul. 2016. Acessado em 19 jul. 2016. Online. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ieVefMuW2jA

VILCHES, M. A; CORRÊA, M. L. Curvas. **Cálculo: Volume III**. Rio de Janeiro. 2, p. 47 – 95.