

## DETERMINAÇÃO DO DESVIO DA VERTICAL PELO MÉTODO PROCRUSTES UTILIZANDO A DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

SAMOEEL GIEHL; DARLAN PAULO COSSUL<sup>2</sup>; ROGERS ADEMIR DRUNN  
PEREIRA<sup>3</sup>; SUELEN CRISTINA MOVIO HUINCA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas – [samoelgiehl@yahoo.com.br](mailto:samoelgiehl@yahoo.com.br)

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas – [darlancossul@hotmail.com](mailto:darlancossul@hotmail.com)

<sup>3</sup>Universidade Federal de Pelotas – [r51505150@gmail.com](mailto:r51505150@gmail.com), [suelen.huinca@gmail.com](mailto:suelen.huinca@gmail.com)

### 1. INTRODUÇÃO

A Topografia e a Geodésia se ocupam da determinação de coordenadas sobre a superfície da Terra. A primeira em âmbito local; a segunda em âmbito global. Estas ciências são importantes para o planejamento urbano e rural, aplicações militares, navegação aérea entre muitos outros exemplos.

A Terra apresenta uma distribuição irregular de massas. Tendo-se em vista a referida distribuição, diferentes sistemas de referência são empregados para a determinação de coordenadas. Um está vinculado a uma direção chamada normal e outro a uma direção chamada vertical.

Para relacionar o sistema astronômico local ao sistema geodésico global geocêntrico, GRAFAREND E AWANGE (2000 apud ANDRADE, 2008 e apud ZANETTI; FREITAS; VEIGA, 2004) determinaram o desvio da vertical a partir do método de Procrustes, usando uma solução de um sistema matricial de equações normais bilinear obtida por uma média de decomposição em valor singular, obtendo três parâmetros: longitude astronômica ( $\Lambda$ ), latitude astronômica ( $\Phi$ ) e um parâmetro de orientação desconhecida ( $\Sigma$ ).

Os sistemas de navegação por satélites (GNSS) adotam como referência a normal. Por outro lado, os levantamentos topográficos se ocupam da vertical. Considerando-se que as grandes redes de referência são obtidas via levantamentos GNSS e os trabalhos de engenharia estão associados com levantamentos que tomam a vertical por referência, é necessário integrar a normal com a vertical. Esta integração se dá via a determinação das componentes do desvio da vertical.

O objetivo do trabalho é o exercício da determinação de componentes do desvio da vertical no Campus Capão do Leão da UFPel.

### 2. METODOLOGIA

Os levantamentos topográfico e geodésico foram realizados no Campus Capão do Leão da Universidade Federal de Pelotas, conforme figura 1.

A partir de um ponto central, visaram-se seis pontos. Todos os pontos foram escolhidos arbitrariamente e materializados.

Utilizando-se de uma estação total, marca Sokkia, modelo SET630rk, realizou-se sete observações em Posição Direta (PD) e Posição Inversa (PI) que originaram valores médios que foram adotados como resultado. O desnível entre o ponto central e os pontos visados foi obtido com auxílio do nivelamento trigonométrico.



Figura 1: Pontos materializados para determinação do desvio da vertical.

As coordenadas associadas ao sistema local foram determinadas pelas equações (1) e (2).

$$x_p = x_{pb} + DH_{pb-p} \cdot \sin AZ_{pb-p} \quad (01)$$

$$y_p = y_{pb} + DH_{pb-p} \cdot \cos AZ_{pb-p} \quad (02)$$

Onde,  $DH_{pb-p}$  é a distância reduzida ao plano topográfico desde o ponto central até os pontos visados.

A diferença entre as coordenadas dos pontos visados e o ponto central foi calculada para a obtenção da matriz A (6).

O equipamento utilizado para a obtenção das coordenadas geodésicas, latitude ( $\varphi$ ), longitude ( $\lambda$ ) e altura geométrica ( $h$ ), foi o receptor geodésico de dupla frequência HiPer Lite RTK, da empresa Topcon. O rastreamento foi efetuado com tempo aproximado de 30 minutos em cada ponto.

Os pontos foram processados relativamente à estação RSPE da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), localizada na laje do prédio do Instituto de Física e Matemática (IFM) da Universidade Federal de Pelotas - Campus Capão do Leão - RS.

As coordenadas geodésicas curvilíneas ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) foram transformadas em coordenadas geodésicas cartesianas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ), de acordo com:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ [N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (3)$$

em que o Raio da Seção Transversal Meridiana ( $N$ ) e a excentricidade ( $e$ ) do elipsoide são respectivamente dadas por:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi}} \quad (4)$$

$$e^2 = f \cdot (2 - f) \quad (5)$$

Onde  $a$  é o semi-eixo maior do elipsóide (6.378.137m) e  $f$  é o achatamento (1/298,257222101).

Encontradas as coordenadas cartesianas tridimensionais de todos os pontos, calcula-se a diferença entre as componentes das coordenadas, conforme explicitado nas matrizes **A** e **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & y_n - y_1 & z_n - z_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 & Y_2 - Y_1 & Z_2 - Z_1 \\ X_3 - X_1 & Y_3 - Y_1 & Z_3 - Z_1 \\ X_4 - X_1 & Y_4 - Y_1 & Z_4 - Z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n - X_1 & Y_n - Y_1 & Z_n - Z_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

A matriz **A** se refere ao sistema local e a matriz **B** se refere ao sistema global.

Conforme Ferreira et al. (2008) a solução de Procrustes parcial sugere que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} \quad (8)$$

SCHÖNEMANN, (1996 apud FERREIRA et al., 2008), descreve como encontrar a matriz de rotação (**R**), dado por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \quad (9)$$

$$\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{V}^T \quad (10)$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{W} \cdot \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{V}^T \quad (11)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}^T \quad (12)$$

**V** e **W** foram determinados pela decomposição em valores singulares, através do MATLAB.

Calcula-se  $\Lambda$  e  $\Phi$  conforme as equações (13) e (14). As componentes do desvio da vertical ( $\xi, \eta$ ) foram obtidas pelas equações (15) e (16).

$$\Lambda = \text{atan} \left( \frac{r_{32}}{r_{31}} \right) \quad (13)$$

$$\Phi = \text{atan} \frac{r_{33}}{\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}} \quad (14)$$

$$\xi = \Phi - \varphi \quad (15)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cdot \cos \varphi \quad (16)$$

Por fim, foi calculado o módulo do desvio vertical pela equação (17).

$$\text{Desvio da vertical} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (17)$$

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A tabela 1 apresenta os valores de latitude, longitude e altura elipsoidal observados no levantamento geodésico.

Tabela 1: Coordenadas geodésicas curvilíneas observadas pelo levantamento GNSS.

Pontos	Latitude	Longitude	Altura elipsoidal (m)
1	-31° 48' 7,88124"	-52° 25' 2,47384"	23,3480
2	-31° 48' 4,75629"	-52° 25' 2,59929"	23,1512
3	-31° 48' 4,8588"	-52° 25' 0,85467"	22,8213
4	-31° 48' 8,88546"	-52° 24' 58,3587"	23,2060
5	-31° 48' 12,04131"	-52° 24' 57,96451"	23,4040
6	-31° 48' 10,46786"	-52° 25' 0,74093"	23,4243
Central	-31° 48' 8,81340"	-52° 25' 0,71113"	23,4260

Comparando os valores obtidos nos trabalhos de FERREIRA et al. (2008) e ANDRADE, (2008) com os valores apresentados na tabela 2, nota-se resultados

com diferença significativa, na ordem de segundos e minutos respectivamente.

A componente  $\xi$  e a componente  $\eta$  apresentaram variações expressivas, com valores médios de  $-0^{\circ} 20' 27,27''$  e  $0^{\circ} 33' 41,39''$  respectivamente.

A posição inversa comparada com a direita apresentou os menores valores das componentes ( $\xi$ ,  $\eta$ ) do desvio da vertical.

Tabela 2: Componentes e módulo do desvio da vertical.

	$\xi$	$\eta$	Módulo
Posição Direta	$-0^{\circ} 20' 37,59''$	$0^{\circ} 34' 2,02''$	$0^{\circ} 49' 30,21''$
Posição Inversa	$-0^{\circ} 20' 16,96''$	$0^{\circ} 33' 20,77''$	$0^{\circ} 39' 11,42''$
Média	$-0^{\circ} 20' 27,27''$	$0^{\circ} 33' 41,39''$	$0^{\circ} 44' 20,81''$

#### 4. CONCLUSÕES

Conclui-se que a metodologia apresentada possibilita a obtenção do desvio da vertical.

Porém os resultados indicaram erros grosseiros, que foram originados por uma série de fatores: estação total sem retificação/calibração, levantamento topográfico e geodésico em dias com vento e impossibilidade de uma análise estatística criteriosa em tempo hábil.

Sugere-se, conforme citado em ANDRADE (2008), a utilização de nivelamento geométrico, por ser o método mais preciso dentre os outros.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, R. J. de O. **Determinação do desvio da vertical empregando observáveis da topografia clássica e do posicionamento por satélites**. 2008. 109 f. Dissertação (Mestrado em Geotecnica; Saneamento ambiental) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2008. Disponível em: <<http://locus.ufv.br/handle/123456789/3703>>. Acesso em: 12 jul. 2016.

FERREIRA, V. G. et al. Metodologias para a determinação das componentes do desvio da vertical. In: **II SIMPÓSIO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO**, 2., 2008, Recife. **Anais...**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2008. Disponível em: <[https://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOII\\_CD/Organizado/geo/055.pdf](https://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOII_CD/Organizado/geo/055.pdf)>. Acesso em: 1 jun. 2016.

GRAFAREND, E.W.; AWANGE, J.L. **Determination of vertical deflections by GPS/LPS Measurements**. Zfv. v.8, 2000. p 279-288.

SCHÖNEMANN, P. H. **A generalized solution of the orthogonal procrustes problem**. **Psychometrika**, Vol 31- No. 1 March 1966.

ZANETTI, M. A. Z.; FREITAS, S. R. C. de; VEIGA, L. A. K. Relacionamento entre referenciais locais e referenciais globais: problema procrustes simples. in: **SIMPÓSIO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO**, 1., 2004, Recife. **Anais...**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004. Disponível em: <<https://www.ufpe.br/cgtg/ISIMGEO/CD/html/geodesia/Artigos/G031.pdf>>. Acesso em: 21 jul. 2016.