ESPAÇOS DE BANACH CLÁSSICOS

CHRISTIAN DA COSTA CABREIRA[1]; VINICIUS TORRES MARQUES[2]; MAURICIO ZAHN[3]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – christian.cabreira@gmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – vini.torres.96@gmail.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – mauricio.zahn@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A teoria dos espaços de Banach surgiu na década de 20, com os trabalhos de Análise Funcional do matemático polonês Stefan Banach. Foi ele quem iniciou um estudo abrangente de espaços normados em sua dissertação de 1922, culminando em seu livro de 1932. (CAROTHERS, 2005).

Dizemos que um espaço vetorial normado X é um espaço de Banach se for completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy for convergente em X. (FABIAN et al, 2001).

Os principais espaços de Banach são os espaços das sequências p – somáveis, denotados por ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, os espaços das sequências limitadas, denotadas por ℓ_∞, o espaço de todas as sequências que convergem para zero, denotado por c_0, o espaço das funções contínuas em $[0,1]$, munido com a norma do supremo, denotado por $C([0,1])$, dentre outros (FABIAN et al, 2001).

Dessa maneira, nossa pesquisa consistiu em estudar estes espaços, tendo em vista sua ampla utilização em Análise Funcional.

2. METODOLOGIA

Primeiramente, fundamentamos alguns conceitos importantes. Estudamos o conceito de espaço métrico e de sequência de Cauchy em um espaço métrico, bem como o conceito de completude. Em seguida definimos norma em um espaço vetorial e induzimos daí uma métrica natural através da aplicação $d(x,y) = \|x-y\|$. Isso mostra que todo espaço normado é métrico. Depois foram elencados exemplos de espaços vetoriais normados, definindo uma norma para os espaços $C([0,1])$, ℓ_∞ e ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$. No entanto, para podermos provar que a aplicação definida em ℓ_p é uma norma, foi preciso deduzir uma importante desigualdade, conhecida como Desigualdade de Minkowski (FABIAN et al, 2001). Por fim, mostramos que cada um dos espaços normados acima elencados são espaços de Banach. Dentre as referências bibliográficas, as que mais seguimos foram FABIAN et al (2001) e KREYSZIG (1978).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O objetivo final de nossa pesquisa, até o presente momento, foi mostrar que os espaços $C([0,1])$, ℓ_∞ e ℓ_p, com $1 \leq p < \infty$, ℓ_∞ são de espaços de Banach. Essencialmente, Definimos o conceito de espaço métrico (KREYSZIG, 1978), bem como o conceito de bolas em um espaço métrico. Estudamos o conceito de Sequência de Cauchy em um espaço métrico, conforme a definição que segue.

Definição [KREYSZIG, 1978] Dizemos que uma sequência (x_n) em um espaço métrico (M,d) é de Cauchy se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir um índice $n_0 \in N$ tal que, para todos índices $m,n \geq n_0$, implicar em $d(x_m,x_n) < \varepsilon$.

Depois, considerando um espaço vetorial X, apresentamos o importante conceito de norma:

Definição [FABIAN et al, 2001] Definimos por norma em um espaço vetorial X como sendo toda a aplicação $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ que cumprir as condições: para todos $x, y \in X$ e para todo escalar λ, valer

(i) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Um espaço vetorial X munido de uma norma $\|\cdot\|$ é denotado por $(X,\|\cdot\|)$ e o mesmo é chamado de um espaço vetorial normado. Quando não houver confusão, podemos nos referir ao espaço normado simplesmente por X e nesse caso a norma fica subtendida.

Em seguida, foram estudados alguns exemplos de espaços normados.

Exemplo 1. No espaço vetorial $C([0,1])$ de todas as funções contínuas em $[0,1]$, definimos a aplicação $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$, e mostramos que tal aplicação é uma norma em $C([0,1])$. Portanto, tal espaço é normado.

Exemplo 2. Definimos por ℓ_∞ o espaço vetorial de todas as sequências infinitas limitadas. Dado $x = (x_n) \in \ell_\infty$, definimos a sua norma pondo $\|x\|_\infty = \sup_{i \in N} |x_i|$. Portanto, o espaço $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado. Como explicado acima, podemos denotá-lo simplesmente por ℓ_∞ e sua norma fica subtendida.

Exemplo 3. Fixado $1 \leq p < \infty$, definimos por ℓ_p o conjunto de todas as sequências infinitas p - somáveis, ou seja, o conjunto

$$\ell_p = \{x = (x_n) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}.$$

No entanto, para mostrar que tal conjunto é um espaço vetorial e para definir uma norma no mesmo, precisamos provar alguns resultados preliminares, como segue.

Lema 1. Para todos $a,b \geq 0$ e para todo $0 < \lambda < 1$, vale a desigualdade

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Prova: Observe que quando $b=0$ a desigualdade vale trivialmente. Suponha então que $b \neq 0$. Assim, dividindo a desigualdade procurada por b, temos que mostrá-la é equivalente a mostrar que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} \leq \lambda\left(\frac{a}{b}\right)+1-\lambda.$$

Escreva $t=\frac{a}{b} \geq 0$ e defina a função $f:[0,+\infty) \rightarrow R$ por $f(t)=t^{\lambda}-\lambda t$. Examinando os pontos críticos de f, ou seja onde $f'(t)=\lambda(t^{\lambda-1}-1)=0$ é fácil ver que $t=1$ é um ponto crítico da função. Assim, quando $t>1$ segue que $t^{\lambda-1}-1<0$ e portanto f é decrescente em $(1,+\infty)$, e se $0 \leq t<1$ segue que $t^{\lambda-1}-1>0$ e portanto f é decrescente em $(0,1)$. No primeiro caso, quando $t>1$ teremos $f(t)<f(1)$, já no segundo caso quando $0 \leq t<1$ também teremos $f(t)<f(1)$. Ou seja, em qualquer dos casos se conclui que

$$t^{\lambda}-\lambda t<1-\lambda, \forall t \geq 0, t \neq 1,$$

e para $t=1$ vale a igualdade. Quando $t=\frac{a}{b} \geq 0$ segue o resultado. □

Definição [KREYSZIG, 1978] Dado $1<p<\infty$, definimos o expoente conjugado de p como sendo o número real $1<q<\infty$ tal que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Quando $p=1$ definimos o seu expoente conjugado por $q=\infty$ (WOJTASZCZYK, 1991).

O Lema 1 combinado com a Definição acima nos auxiliou a provar o resultado que segue.

Lema 2 [FABIAN et al, 2001] (Desigualdade de Holder) Dados $x=(x_n)_n$ e $y=(y_n)_n$ elementos de ℓ_p e q o expoente conjugado de p, então

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Por fim, com auxilio do Lema 2, provamos o Lema que segue.

Lema 3 [FABIAN et al, 2001] (Desigualdade de Minkowski) Dados $p \in [1,\infty)$ e $x=(x_n), y=(y_n) \in \ell_p$, então

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, voltando ao conjunto ℓ_p do Exemplo 3, definindo a aplicação $\|\cdot\|_p : \ell_p \rightarrow [0,\infty)$ por $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, temos que o Lema 3 se torna fundamental para provar a desigualdade triangular da definição de norma para os espaços ℓ_p. Dessa maneira, temos que o Exemplo 3 nos fornece que ℓ_p é um espaço vetorial normado, para todo $p \in [1,\infty)$.

De posse dos resultados acima, avançamos nosso estudo definindo:

Definição [FABIAN et al, 2001] Dizemos que um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ é de Banach se toda sequência de Cauchy em X for convergente com a métrica induzida pela norma, ou seja, se X for um espaço completo com a métrica induzida pela norma.

Assim, de posse da definição de Espaço de Banach, provamos o seguinte Teorema, principal resultado de nossa pesquisa:

Teorema [FABIAN et al, 2001] São espaços de Banach os espaços definidos nos Exemplos 1, 2 e 3, com suas respectivas normas usuais.

4. CONCLUSÕES

Este é apenas um estudo inicial sobre os espaços de Banach. Embora sejam espaços clássicos, sua utilização na Análise Funcional é vital pois fornece uma série de exemplos importantes para o desenvolvimento da teoria. Continuaremos nossos estudos sobre espaços de Banach, estudando nos próximos meses o espaço c_0, separabilidade em espaços de Banach, noções sobre operadores lineares e espaços duais.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAROTHERS, N. L. **A Short Course on Banach Space Theory.** USA: Cambridge University Press, 2005.

FABIAN, M; et al. **Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry.** New York – Berlin – Heidelberg: Srpinger-Verlag, 2001.

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** USA: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

WOJTASZCZYK, P. **Banach Spaces for Analysts**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.