

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR NÃO ESTACIONÁRIA EM UM MEIO COM DUAS CAMADAS

JULIANA CONTREIRA¹; GUILHERME JAHNECKE WEYMAR²; REGIS QUADROS³; DANIELA BUSKE⁴

¹Universidade Federal de Pelotas – julianacontreira@hotmail.com

²Universidade Federal de Pelotas – guicefetr@gmail.com

³Universidade Federal de Pelotas – quadros99@gmail.com

⁴Universidade Federal de Pelotas – danielabuske@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Cada vez mais percebe-se que um projeto de edificações não pode ser resumido em atender às necessidades de segurança, estética e comodidade dos usuários, é preciso também, a criação de um meio ambiente favorável, além da necessidade de um estudo voltado as principais causas de patologias nos sistemas construtivos. O ideal para a confecção de um projeto é obedecer as condições climáticas de cada região, propiciando aos usuários conforto térmico aliado a menores gastos com sistemas de condicionamento de ar. Neste trabalho, desenvolve-se uma metodologia semi-analítica com a finalidade de calcular o fluxo de calor transiente em paredes de edificações com duas camadas. O método baseia-se na aplicação da transformada de Laplace com inversão por Quadratura Gaussiana (BEYER; VILHENA, 1998).

2. METODOLOGIA

O problema de condução de calor unidimensional é definido por uma parede, submetida a um fluxo de calor $q(t)$ em $x = 0$, e condição de isolamento térmico na superfície oposta, $x = L$, a parede é composta por dois meios, cada um representando um elemento construtivo, como por exemplo, reboco, chapisco ou tijolo, que possuem propriedades termofísicas diferentes, conforme representada na Figura 1:

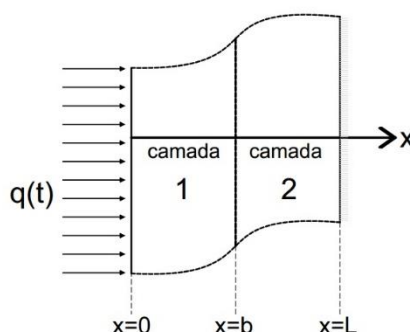


Figura 1. Sólido Estudado: Parede Composta de Duas Camadas

Descreve-se matematicamente o problema, pelo seguinte sistema recursivo de equações do calor, dado a seguir:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \quad (2)$$

onde T_1 e T_2 representam as temperaturas médias, α_1 e α_2 as difusividades térmicas dos materiais nas camadas 1 e 2, respectivamente. Para o cálculo da difusividade utiliza-se a equação $\alpha = k/\rho s$, sendo k a condutividade térmica (J/ms°C), ρ a densidade de massa (Kg/m³), e s a capacidade térmica específica (J/Kg°C). As equações (1) e (2) estão sujeitas às seguintes condições de contorno: fluxo de calor em $x = 0$, $\left(-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_{x=0} = q(t)$ e fluxo nulo em $x = L$, $\left(-k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\right)_{x=L} = 0$; condição inicial: $T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = T_0$ e as condições de continuidade: $T_1|_{x=b} = T_2|_{x=b}$ e $-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}|_{x=b} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}|_{x=b}$.

O problema acima descrito, bem como a aplicação da transformada de Laplace podem ser encontrados nos textos básicos de transferência de calor (ÖZISICK, 1993). Para resolução do problema proposto, aplica-se a transformada de Laplace no modelo matemático, nas condições de contorno, inicial e de continuidade. A solução da equação (1) conforme as condições elencadas consiste na separação de duas soluções: solução complementar e solução particular. A solução complementar é dada por:

$$\bar{T}_{c1}(x, r) = A(r)e^{\left(\sqrt{\frac{r}{\alpha_1}}\right)x} + B(r)e^{-\left(\sqrt{\frac{r}{\alpha_1}}\right)x} \quad (3)$$

A solução particular obtida é:

$$\bar{T}_{p1}(x, r) = \frac{\bar{T}_0}{r} \quad (4)$$

A solução transformada completa para a primeira camada da parede é representada pela soma da solução complementar e particular, mostrada a seguir:

$$\bar{T}_1(x, r) = A(r)e^{\left(\sqrt{\frac{r}{\alpha_1}}\right)x} + B(r)e^{-\left(\sqrt{\frac{r}{\alpha_1}}\right)x} + \frac{\bar{T}_0}{r} \quad (5)$$

De forma análoga a equação (1), o problema (2) pode ser resolvido, obtendo como solução:

$$\bar{T}_2(x, r) = C(r)e^{\left(\sqrt{\frac{r}{\alpha_2}}\right)x} + D(r)e^{-\left(\sqrt{\frac{r}{\alpha_2}}\right)x} + \frac{\bar{T}_0}{r} \quad (6)$$

Para encontrar os coeficientes desconhecidos (A, B, C e D) das equações (5) e (6), aplicam-se as condições de contorno e de continuidade, resultando no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} uA(r) - uB(r) = \frac{-Q(r)}{K_1} \\ -K_1 u e^{ub} A(r) - K_1 u e^{-ub} B(r) + K_2 v e^{vb} C(r) - K_2 v e^{-vb} D(r) = 0 \\ -K_2 v e^{vL} C(r) + K_2 v e^{-vL} D(r) = 0 \\ e^{ub} A(r) + e^{-ub} B(r) - e^{vb} C(r) - e^{-vb} D(r) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

onde $u = \sqrt{\frac{r}{\alpha_1}}$ e $v = \sqrt{\frac{r}{\alpha_2}}$. Resolvendo o sistema e substituindo o valor dos termos nas equações (5) e (6), obtém-se as soluções transformadas para os problemas (1) e (2) em função da variável r . Para a inversão da transformada de Laplace utiliza-se o método de Quadratura Gaussiana, devido à impossibilidade de calcular a inversa analiticamente.

2.1. QUADRATURA GAUSSIANA

Para obter a inversão da transformada de Laplace para o domínio tempo, é utilizada:

$$T_i(x, t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{rt} \bar{T}_i(x, r) ds \quad (8)$$

Considerando $rt = p$ para excluir o parâmetro t no termo exponencial, que é a função peso, fazendo a mudança da variável $r = p/t$ encontra-se a fórmula de Quadratura Gaussiana que HEYDARIAN; MULLINEAU(1981) afirma ser adequada:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^p \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{k=1}^n a_k F(p_k) \quad (9)$$

sendo a_k e p_k são respectivamente os pesos e as raízes da Quadratura Gaussiana, $F(p_k)$ uma função relacionada com $\bar{T}_i(x, \frac{p_k}{t})$, que é obtida por $F(p_k) = \frac{p_k}{t} \bar{T}_i(x, \frac{p_k}{t})$. Substituindo o valor de $F(p_k)$ na equação (9), encontra-se:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^p \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{p_k}{t}\right) \bar{T}_i(x, \frac{p_k}{t}) \quad (10)$$

A partir disto, é possível calcular $T_i(x, t)$, substituindo r por $\frac{p_k}{t}$ e utilizando juntamente os valores de a_k encontrados em STROUD; SECREST (1966).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para uma análise do modelo proposto, utilizam-se as mesmas propriedades termofísicas do trabalho de OLIVEIRA (2015). O problema térmico estudado é definido por uma placa plana de duas camadas, onde cada camada é composta de um determinado material. Conforme a Figura 1, L representa o comprimento da placa e b o local de mudança das camadas. Nesta aplicação, na camada 1 tem-se as propriedades termofísicas do aço AISI 1010, enquanto na camada 2 tem-se as propriedades termofísicas do cobre. A Tabela 1 apresenta as propriedades de ambos os materiais.

Tabela 1: Propriedades Termofísicas

	Aço AISI 1010	Cobre
Condutividade térmica (W/mK)	64	401
Difusividade Térmica (m ² /s)	18,8x10 ⁻⁶	117x10 ⁻⁶

Considera-se ainda, que a placa está submetida a tais condições: fluxo de calor prescrito de $4 \times 10^5 \text{ W/m}^2$; temperatura inicial: $T_0 = 0^\circ\text{C}$; comprimento de placa: $L = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$; e divisão das camadas: $b = \frac{L}{2} \text{ m}$.

A solução desse problema é dada pela equação (8) e foi implementada utilizando o código computacional FORTRAN 90. Para assegurar a convergência da solução, utilizou-se a continuação analítica, ou seja, resolve-se o problema de condução do calor para um passo de tempo h onde a convergência da solução esta assegurada e utiliza-se esta solução como condição inicial para o próximo passo. Apresenta-se na Figura 2 o comportamento térmico da solução de dupla camada considerando três tempos constantes $t = 0 \text{ s}$, $t = 50 \text{ s}$ e $t = 100 \text{ s}$.

Na Figura 2, é possível observar que o perfil temperatura da segunda camada tem um comportamento aparentemente constante em relação ao da primeira camada, isso é devido a condutividade térmica do material ser muito alta, tornando-o um bom condutor e assim dissipando o calor de uma forma mais rápida.

Na Tabela 2, apresentam-se as temperaturas encontradas para as camadas 1 e 2 em $x = b$, mostrando que a condição de continuidade ($T_1 = T_2$) é satisfeita para os três tempos analisados.

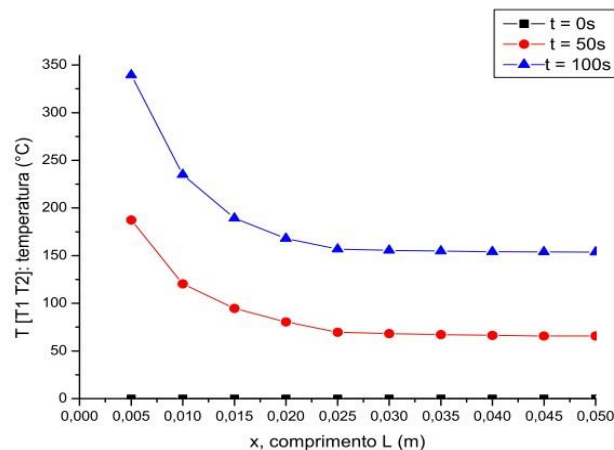


Figura 2. Perfil da Temperatura ao Longo da Espessura da Camada do Material Composto Aço/Cobre

Tabela 2: Verificação da Condição de Continuidade em $x = b$

Tempo (s)	T_1 (°C)	T_2 (°C)
t = 0	0	0
t = 50	69,6321	69,6321
t = 100	158,9609	158,9609

4. CONCLUSÕES

Esta formulação de distribuição unidimensional de temperatura mostrou que é válida para descrever o gradiente de temperaturas em um meio com duas camadas. Embora a avaliação tenha sido feita considerando uma placa de usinagem com revestimento, possuindo espessuras muito pequenas, a mesma equação serve para representar o que ocorre em uma parede, alterando apenas os parâmetros termofísicos dos materiais a serem utilizados.

A solução obtida para a análise térmica fornece o comportamento das temperaturas em qualquer ponto desejado da parede e consequentemente da sua estrutura. Além disso, pode-se observar a variação de temperatura conforme o tempo em que a parede é exposta a fonte de calor e através destas temperaturas é possível analisar o comportamento mecânico e o conforto térmico da estrutura.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEYER, P.; VILHENA, M.T. **Condução de Calor Não-Estacionária em Paredes Externas Multi-Compostas**. 1998. 80f. Tese de Doutorado - PROMEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

HEYDARIAN, M.; MULLINEAU, N. Solution of Parabolic Partial Differential Equations. **Appl. Math. Modelling**, v.5, 448 - 449, 1981.

OLIVEIRA, G. **Solução analítica multicamada em condução de calor: Aplicação em ferramentas revestidas**. 2015. 98f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia.

STROUD, A.; SECREST, D. **Gaussian Quadrature Formulas**. New Jersey: Prentice Hall, 1966.