Obtenção dos termos da série harmônica por somas de Riemann

VICTOR BRAZ[1]; ALEXANDRE MOLTER[2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas– victor.braz@ufpel.edu.br*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – alexandre.molter@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A série harmônica é uma das mais conhecidas e utilizadas dentre as séries. Esse trabalho foi motivado por um fato curioso que ocorreu quando introduziu-se, em aula, o cálculo de áreas por somas de Riemann com partições regulares. Percebeu-se que, conforme o grau das funções polinomiais aumentava, produzia-se os termos da série harmônica. Para as os limites das somas mais comuns podemos verificar esse fato pelo quadro abaixo:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}1=1 \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{k}n=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^3}\sum_{n=1}^{k}n^2=\frac{1}{3} \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^4}\sum_{n=1}^{k}n^3=\frac{1}{4}$$

Notou-se que, para estes casos, há um padrão no limite dos somatórios que é da forma:

$$\frac{1}{k^{p+1}}\sum_{n=1}^{k}n^p=\frac{1}{p+1}.$$

Na metodologia será apresentado um diagrama que estende esta constatação, de obtenção desse padrão, para mais casos, com ordens superiores de polinômios. O objetivo do trabalho é provar que os limites dos somatórios, até onde se apresentam as somas no diagrama, geram os termos da série harmônica e representam a área da região sob uma função contínua dada por:

$$f(x)=x^p \;\; \forall \; p\in\mathbb{N}, \; 0\le x\le 1.$$

2. METODOLOGIA

Primeiramente realizou-se uma verificação numérica utilizando $k=10^6$:

Valor de *p*	Resultado obtido	Resultado esperado
0	1	1
1	0,500005	1/2
2	0,3333338	1/3
3	0,2500005	1/4
9	0,100005	1/10
19	0,0500005	1/20

Observou-se que o padrão estabelecido acima se confirmou até o valor de *p* estabelecido.

Um resultado importante neste trabalho seria o de provar que para todo $k,\ p,\ n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \sum_{n=1}^{k} n^p = \frac{1}{p+1} \quad , \tag{1}$$

mas, infelizmente esta prova ainda não foi obtida e também não se obteve um padrão nas formas fechadas das somas. No entanto, algumas constatações podem ser apresentadas para um número pequeno de termos.

O diagrama abaixo ordena, de acordo com o expoente, os termos da forma fechada da soma $\sum_{n=1}^{k} n^p$ para os valores de *p* entre 0 e 10.

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	k										
1	$\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}k^2$									
2	$\frac{2}{12}k$	$\frac{1}{2}k^2$	$\frac{1}{3}k^3$								
3	0	$\frac{3}{12}k^2$	$\frac{1}{2}k^3$	$\frac{1}{4}k^4$							
4	$-\frac{1}{30}k$	0	$\frac{4}{12}k^3$	$\frac{1}{2}k^4$	$\frac{1}{5}k^5$						
5	0	$-\frac{1}{12}k^2$	0	$\frac{5}{12}k^4$	$\frac{1}{2}k^5$	$\frac{1}{6}k^6$					
6	$\frac{1}{42}k$	0	$-\frac{1}{6}k^3$	0	$\frac{6}{12}k^5$	$\frac{1}{2}k^6$	$\frac{1}{7}k^7$				
7	0	$\frac{1}{12}k^2$	0	$-\frac{7}{24}k^4$	0	$\frac{7}{12}k^6$	$\frac{1}{2}k^7$	$\frac{1}{8}k^8$			
8	$-\frac{1}{30}k$	0	$\frac{1}{9}k^3$	0	$-\frac{7}{5}k^5$	0	$\frac{8}{12}k^7$	$\frac{1}{2}k^8$	$\frac{1}{9}k^9$		
9	0	$-\frac{3}{20}k^2$	0	$\frac{1}{2}k^4$	0	$-\frac{7}{10}k^6$	0	$\frac{9}{12}k^8$	$\frac{1}{2}k^9$	$\frac{1}{10}k^{10}$	
10	$\frac{5}{66}k$	0	$-\frac{1}{2}k^3$	0	k^5	0	$-k^7$	0	$\frac{10}{12}k^9$	$\frac{1}{2}k^{10}$	$\frac{1}{11}k^{11}$

Acompanhando o diagrama, podemos perceber que até *p=10*, $\sum_{n=1}^{k} n^p$ produz um polinômio de grau $p+1$. Logo constata-se que:

$$\sum_{n=1}^{k} n^p = \alpha_{p+1} k^{p+1} + \alpha_p k^p + \alpha_{p-1} k^{p-1} + \cdots + \alpha_2 k^2 + \alpha_1 k \ . \quad (2)$$

Combinando a equação (2) e a equação (1) obtém-se:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \sum_{n=1}^{k} n^p = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \left(\alpha_{p+1} k^{p+1} + \alpha_p k^p + \alpha_{p-1} k^{p-1} + \cdots + \alpha_2 k^2 + \alpha_1 k \right) ;$$

Distribuindo $1/k^{p+1}$ e simplificando chega-se a:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \sum_{n=1}^{k} n^p = \lim_{k\to\infty} \left(\alpha_{p+1} + \frac{\alpha_p}{k} + \frac{\alpha_{p-1}}{k^2} + \cdots + \frac{\alpha_2}{k^{p-1}} + \frac{\alpha_1}{k^p} \right) ;$$

Aplicando o limite as frações vão a zero, restando apenas a constante α_{p+1} , como segue:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \sum_{n=1}^{k} n^p = \alpha_{p+1} = \frac{1}{p+1} \ . \quad (3)$$

De fato, ao observar apenas o termo de maior grau de cada somatório no diagrama, nota-se que este é da forma $k^{p+1}(1/(p+1))$. Assim, se for possível provar este fato para *p* tendendo ao infinito, possivelmente constataríamos que " dada a função contínua $f(x)=x^p : p \in \mathbb{N},\ 0 \le x \le 1$, a área A_p da região delimitada pela função e os eixos coordenados é $1/(p+1)$." No caso da obtenção das áreas pelo *Teorema Fundamental do Cálculo* este fato já é conhecido.

3. RESULTADOS

Teorema 1: O termo h_i *de uma sequência formada pelos termos da série harmônica representa a área sob uma função contínua* $f(x)=x^p : p \in \mathbb{N}.\ 0 \le x \le 1$, *onde* $p=i-1$.

Demonstração: a série harmônica é da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \ .$$

Denominamos $1=h_1, \frac{1}{2}=h_2, \frac{1}{3}=h_3, \ldots, \frac{1}{n}=h_n, \ldots$ e formamos a sequência mostrada à esquerda da igualdade

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) = (h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots, h_n, \ldots) \ . \quad (4)$$

Pela equação (3), supondo que as somas sigam o comportamento apresentado no diagrama, temos que $A_p = 1/(p+1)$, logo

$$A_0=1,\ A_1=\frac{1}{2},\ A_2=\frac{1}{3},\ A_3=\frac{1}{4},\ldots\ .$$

Assim fica fácil ver que $h_i = A_{i-1}$. Combinando as igualdades acima com a Igualdade (4) mostramos que a sequência formada pelos termos da série harmônica representa a área sob funções da forma definida no enunciado do teorema.

$$\left(A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, \ldots\right) = \left(h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots, h_n, \ldots\right).$$

■

4. CONCLUSÕES

O propósito do trabalho era mostrar que os termos da série harmônica podem ser gerados pelo cálculo de áreas, por somas de Riemann, com partições regulares. Constatou-se que os elementos de uma sequência formada pelos termos da série harmônica podem ser interpretados como a área sob o intervalo [0,1] de uma função monomial contínua.

A contribuição do trabalho é apresentar uma aplicação do cálculo de área por somatórios na obtenção dos termos de uma importante série. Além disso, é uma contribuição interessante para ser explorada em aulas de cálculo integral.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H. BIVENS, I. DAVIS, S. **Cálculo.** 8ª ed. Vol. I e II. Porto Alegre: Bookman, 2007.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3ª ed. Vol. 1 e 2. São Paulo: Harbra, 1994.