

SIMULAÇÃO TRIDIMENSIONAL DA DISPERSÃO DE EFLUENTES DE FOGUETES VIA GILTT

JONATAS VOESE¹; REGIS S. QUADROS²; DANIELA BUSKE³

¹Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática - UFPel –
jonatasvoese@gmail.com

²Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática – UFPel – quadros99@gmail.com

³Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática – UFPel – danielabuske@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Muitas vezes nos setores das tecnologias de comunicação e transmissão de dados, é necessário pôr em órbita satélites e sondas. Isto se faz com o auxílio de foguetes e veículos espaciais. No entanto, o lançamento de um foguete é um processo que lança uma grande quantidade de poluentes na atmosfera e que afetam, direta (doenças respiratórias) ou indiretamente (gases de efeito estufa), a saúde da população nas proximidades das bases de lançamento.

Diante disto, é necessário o desenvolvimento de modelos que prevejam o comportamento da dispersão da nuvem de efluentes para que os lançamentos sejam planejados de forma a que os efeitos diretos da liberação de poluentes sejam minimizados.

Os modelos de dispersão de poluentes, em sua abordagem Euleriana, são baseados na equação de advecção-difusão que é derivada da equação de conservação de massa. Uma das técnicas que vem sendo utilizada para resolver este tipo de modelo é a GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*). Esta técnica consiste resumidamente nos seguintes passos: 1) aplicar a transformada de Laplace na variável temporal para transformar o problema transiente em um problema estacionário; 2) expandir a concentração em termos de autofunções, obtidas através da solução de um problema de Sturm-Liouville auxiliar que contenha a maior quantidade possível de informações sobre as condições iniciais e de contorno; 3) aplicar um operador integral que, devido à propriedade de ortogonalidade, simplifica o problema original a uma equação diferencial ordinária linear de primeira ou segunda ordem; 4) a solução da EDO é obtida pelos processos de diagonalização e transformada de Laplace; 5) inversa de Laplace por quadratura gaussiana para obter a concentração original.

MOREIRA et al. (2009) apresentam uma breve revisão do uso da GILTT para encontrar a solução de equações de advecção-difusão uni e bidimensionais, para os casos estacionário e transiente, focando na simulação da dispersão de poluentes na atmosfera. BAINY et al. (2015) usam a GILTT para avaliar a dispersão atmosférica em lançamento de foguetes, baseando-se em uma equação de advecção-difusão bidimensional transiente com deposição.

No presente trabalho apresentamos uma solução analítica tridimensional para a dispersão de efluentes em lançamento de foguetes, utilizando método espectral (passos 2 e 3 acima) em conjunto com a GILTT. Chamaremos o modelo de 3D-GILTT (*Three-dimensional GILTT for Rocket exhaust diffusion*)

2. METODOLOGIA

No presente trabalho usaremos o modelo descrito como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - v_g \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - C(\lambda + \Lambda_R) \quad (1)$$

onde C é a concentração tridimensional $C(x, y, z, t)$; u é a velocidade do vento; v_g é a velocidade de deposição gravitacional; λ é o termo de decomposição físico-química; Λ_R é o coeficiente de remoção; e K_y, K_z são os coeficientes de difusão turbulenta na direção y e z , respectivamente e dependem apenas da altura z .

As condições inicial, de fronteira e de fonte são dadas por:

$$\begin{aligned} C(x, y, z, 0) &= 0 \\ K_y \frac{\partial C}{\partial y} &= 0 \quad \text{em } y = y_0, L_y \\ K_z \frac{\partial C}{\partial z} &= V_d C \quad \text{em } z = z_0; \quad K_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = h \end{aligned} \quad (2)$$

$$C(0, y, z, t) = \frac{Q}{u} [\eta(t) - \eta(t - t_r)] \delta(y - y_0) \delta(z - H_s)$$

onde V_d é a velocidade de deposição; z_0 é o comprimento aerodinâmico; h é a altura acima da superfície; Q é a taxa de emissão; η é a função degrau de Heaviside; t_r é tempo de emissão; δ é a função de Dirac; y_0 é a distância em y em que a concentração é avaliada; e H_s é a altura da fonte.

Para resolver o problema dado pelas equações (1) e (2), primeiramente vamos aplicar o método espectral na variável y . Para tanto, consideremos o problema auxiliar de Sturm-Liouville dado por:

$$\begin{aligned} Y_m''(y) + \beta_m^2 Y_m(y) &= 0 \quad 0 < y < L_y \\ Y_m'(y) &= 0 \quad y=0 \text{ e } y=L_y \end{aligned} \quad (3)$$

onde L_y é o limite do domínio em y e Y_m é a solução do problema dada por $\cos(\beta_m y)$ com $\beta_m = m\pi / L_y$. Agora, expandindo a concentração de poluentes em termos das autofunções obtidas anteriormente, segue que:

$$C(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{C}_m(x, z, t) Y_m(y) \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1), aplicando o operador integral $\int_0^{L_y} (\cdot) Y_n(y) dy$ e truncando o somatório em M termos, obtêm-se um conjunto de $M+1$ equações advectivo-difusivas bidimensionais transientes:

$$\frac{\partial \bar{C}_m}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial x} - v_g \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \bar{C}_m}{\partial z} \right) + \bar{C}_m(\lambda + \Lambda_R + \beta_m^2 K_y) \quad (6)$$

Estas equações são resolvidas usando a GILTT (MOREIRA et al., 2009). Então, aplicando a transformada de Laplace em t , usando a condição inicial dada em (2) e expandindo a concentração transformada da seguinte forma:

$$C_m^*(x, z, r) = \sum_{l=0}^{\infty} \bar{C}_{m,l}(x, r) \Psi_l(z) \quad (7)$$

onde C_m^* representa a concentração transformada e Ψ_l são as autofunções do problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{aligned}\Psi_l''(z) + \alpha_l^2 \Psi_l(z) &= 0 \\ \Psi_l' &= 0 \quad \text{para } z = h \\ K_z \Psi_l'(z) - V_d \Psi_l(z) &= 0 \quad \text{para } z = z_0\end{aligned}\quad (8)$$

dadas por $\Psi_l(z) = \cos(\alpha_l(z-h))$ e sendo α_l os autovalores do problema auxiliar obtidos pelo método numérico de Newton-Raphson. Substituindo (7) em (6), aplicando o operador integral $\int_0^h (\cdot) \Psi_j(z)$ e truncando o somatório em L termos obtem-se, em forma matricial:

$$C'(x, r) + FC(x, r) = 0 \quad (9)$$

sendo $F = B^{-1}E$, onde:

$$B = \int_0^h u \Psi_l \Psi_j;$$

$$C(x, r) = \bar{C}_{m,l};$$

$$E = \int_0^h \left[-v_g \Psi_l' \Psi_j - K_z' \Psi_l' \Psi_j + \alpha_l^2 K_z \Psi_l \Psi_j + \beta_m^2 K_y \Psi_l \Psi_j + (\lambda + \Lambda_R + r) \Psi_l \Psi_j \right] dz$$

A EDO acima é resolvida usando-se a transformada de Laplace em x e a diagonalização da matriz F , conforme descrito em MOREIRA et al. (2009). Devido à complexidade da inversa de Laplace na variável temporal, é necessário resolvê-la usando quadratura gaussiana.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para os resultados serão considerados neste trabalho $v_g = 0$; $\lambda = \Lambda_R = 0$; $V_d = 0$; $H_s = 115$ metros; $Q = 1$ e $t_r = 3600$ segundos. Os outros dados e parametrizações da turbulência foram retirados do trabalho de BUSKE et al. (2012).

As concentrações de poluentes obtidas pelo presente modelo foram comparadas com aquelas encontradas nos experimentos de Copenhagen (GRYNING (1981)), uma vez que não existem dados experimentais para o caso da liberação de foguetes em bases de lançamento disponíveis.

A análise estatística dos resultados é realizada utilizando índices estatísticos descritos em HANNA (1989), a saber: erro médio quadrático normalizado (NMSE); coeficiente de correlação (COR); fator de dois (FA2); fator de inclinação (FB) e desvio fracional padrão (FS). Os resultados são mostrados na Tabela (1). Uma análise da tabela mostra que o modelo é eficiente em representar a concentração em efluentes de foguetes, mesmo o fenômeno de dispersão sendo um processo turbulento e, portanto, difícil de ser modelado, estando sujeito a condições atmosféricas e de terreno.

O gráfico de espalhamento corrobora a ideia de que o modelo está de acordo com os dados experimentais conforme podemos ver na Figura (1). Quanto mais próximo da diagonal melhores são os resultados.

	NMSE	COR	FA2	FB	FS
Valor ideal	0	1	1	0	0
3D-GILTTR	0.08	0.93	0.87	0.11	0.1

Tabela 1: Análise estatística do modelo 3D-GILTTR.

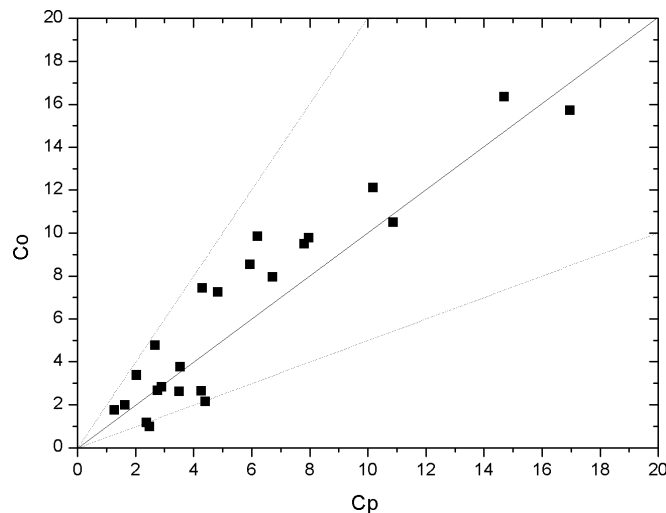


Figura 1: Gráfico de espalhamento da concentração predita e observada pelo presente modelo.

4. CONCLUSÕES

Analizando os dados obtidos acima e levando em consideração que: os resultados foram gerados para um modelo simplificado, sem deposição e sem fonte; e que, além disso, o fenômeno de dispersão é turbulento; nota-se que o modelo mostrou-se adequado no cálculo das concentrações. Apresentando uma boa aproximação com os dados observacionais, tornando o modelo uma boa ferramenta para o estudo do fenômeno de dispersão de efluentes.

Agradecimentos: Os autores agradecem ao apoio financeiro recebido pelo projeto Pró-Estratégia/CAPES.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAINY, B.K.; BUSKE, D.; QUADROS, R.S. An analytic model for dispersion of rocket exhaust clouds: specifications and analysis in different atmospheric stability conditions. **Journal of Aerospace Technology and Management**, v.7, p. 374-385, 2015.

BUSKE, D.; VILHENA, M.T.; TIRABASSI, T.; BODMANN, B. Air pollution steady-state advection-diffusion equation: the general three-dimensional solution. **Journal of Environmental Protection**, v.3, p. 1124-1134, 2012.

GRYNING, S.E. **Elevated source SF6 – tracer dispersion experiments in the Copenhagen area**. Report RISOE-R-446, Risoe National Laboratory, Roskilde, Dinamarca, 1981.

HANNA, S.R. Confidence limit for air quality models as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods. **Atmospheric Environment**, v. 23, p. 1385-1395, 1989.

MOREIRA, D.M.; VILHENA, M.T.; BUSKE, D.; TIRABASSI, T. The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. **Atmospheric Research**, v. 92, p. 1-17, 2009.