

## SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO EM UMA CAMADA LIMITE ESTÁVEL USANDO OS DADOS DO EXPERIMENTO DE CABAUW

**RENATA KLEIN MORAES<sup>1</sup>; JARDEL DYLEWSKI<sup>2</sup>; DANIELA BUSKE<sup>3</sup>; REGIS S. DE QUADROS<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>*Universidade Federal de Pelotas – srtklein@gmail.com*

<sup>2</sup>*Universidade Federal de Pelotas – jardeldylewski@hotmail.com*

<sup>3</sup>*Universidade Federal de Pelotas – danielabuske@gmail.com*

<sup>4</sup>*Universidade Federal de Pelotas – quadros99@gmail.com*

### 1. INTRODUÇÃO

A melhoria das condições de vida da população pressupõe o desenvolvimento industrial e tecnológico em níveis elevados de modo que se possa atender a demanda de produtos e serviços. Com isso, são gerados resíduos que acabam sendo liberados no solo, rios, lagos, mares e, principalmente, na atmosfera.

Devido ao custo elevado com o monitoramento ambiental, os estudos experimentais da dispersão dos poluentes acabam sendo inviáveis. Com isso, faz-se necessário o desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de simular a concentração de poluentes presentes na atmosfera, relacionando a taxa de emissão com a qualidade do ar.

Neste trabalho, será usada a equação de difusão-advecção unidimensional transiente. A solução dessa equação será obtida via GILTT (Generalized Integral Laplace Transform Technique) conforme descrito em (MOREIRA et al., 2009). Para reproduzir o campo de concentração de poluentes liberados por uma fonte na Camada Limite Estável (CLE), serão utilizados os dados do experimento de Cabauw.

### 2. METODOLOGIA

Considerando a equação de advecção-difusão unidimensional que esboça a dispersão de poluentes na atmosfera descrita como:

$$\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z(z) \frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z} \right) \quad (1)$$

onde  $\bar{c}(z,t)$  representa a concentração média integrada lateralmente ( $\text{g/m}^2$ ) e  $K_z$  é o coeficiente de difusão vertical ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

A equação (1) está sujeita às condições de contorno de fluxo nulo no solo e no topo da camada limite estável:

$$\frac{\partial \bar{c}(z,t)}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0, h \quad (1a)$$

e uma fonte com taxa de emissão  $Q$  na altura  $H_s$  sujeita a condição representada por uma delta de Dirac dada por:

$$\bar{c}(z,0) = Q \delta(z - H_s) \quad \text{em } t = 0 \quad (1b)$$

na qual  $h$  é a altura da camada limite (m) e  $Q$  é a taxa de emissão (g/s).

O problema (1) é resolvido analiticamente aplicando-se a técnica GILTT. Este método combina uma expansão em série com uma integração. Na expansão, é usada uma base trigonométrica determinada através de um

problema associado de Sturm-Liouville. A integração é feita em todo o intervalo da variável transformada, utilizando-se a propriedade de ortogonalidade da base usada na expansão. A solução do sistema de equações diferenciais ordinárias, resultante da aplicação da GILTT, é feita analiticamente via transformada de Laplace e diagonalização (MOREIRA et al., 2009). A derivação da solução do problema é analítica exceto pelo erro de truncamento de um somatório.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O experimento utilizado para mostrar o comportamento do modelo apresentado foi o de Cabauw, descrito por Agterberg et al. (1983) e Van Duuren e Nieuwstadt (1980), realizado na cidade de Cabauw, Holanda, nos anos de 1977 e 1978, sob condições atmosféricas estáveis e instáveis. O poluente SF6 (hexafluoreto de enxofre) foi lançado sem empuxo, de uma fonte alta, com alturas de 80 ou 200 m e coletado por amostradores de 1,5 m de altura.

A partir disso, estudou-se o processo de transporte turbulento ocorrendo em tempo mais avançado de uma camada limite estável noturna. Para simular o caso, escolheu-se os parâmetros  $\alpha_1 = 3/2$  e  $\alpha_2 = 1$ . As medidas foram realizadas de duas a três horas após o pôr-do-sol.

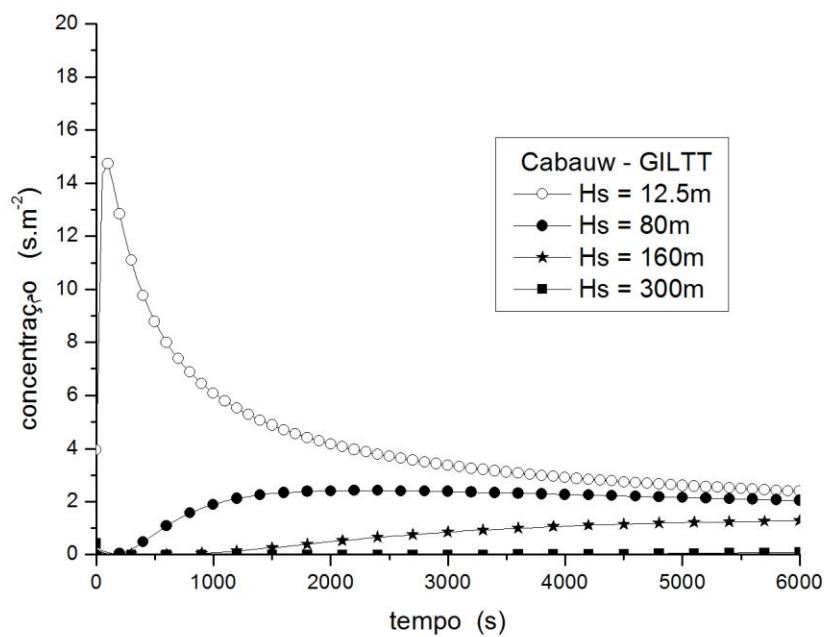
O coeficiente de difusão turbulenta vertical ( $K_z$ ) utilizado, derivado da teoria de similaridade local e da teoria da difusão estatística, pode ser escrito como (DEGRAZIA E MORAES, 1992):

$$\frac{K_z}{u_* h} = \frac{0.33 \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \left(\frac{z}{z_i}\right)}{1 + 3.7 \left(\frac{z}{z_i}\right) \left(\frac{z_i}{\Lambda}\right)} \quad (2)$$

onde  $\Lambda$  é o comprimento de Monin-Obukhov local,  $u_*$  é a velocidade de fricção,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes que dependem do estado de desenvolvimento temporal, da inclinação do terreno, da baroclinidade e de outros fatores que influenciam a estrutura da CLE.

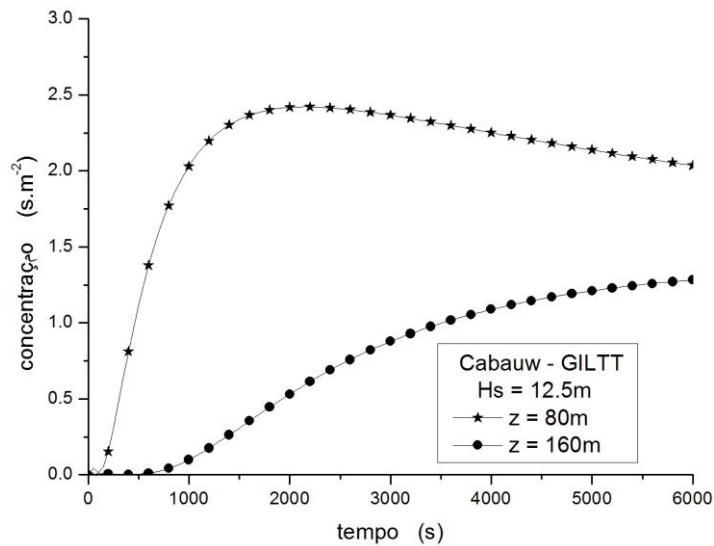
Para a simulação do caso descrito, foram utilizados os seguintes parâmetros experimentais:  $\Lambda = 116\text{m}$ ,  $Q = 400\text{g/m}^2$  (taxa de emissão),  $h = 400\text{m}$  (altura da CLE) e  $u_* = 0.31\text{m/s}$  (velocidade de fricção).

A figura 1 mostra a concentração ao nível do solo ( $z = 0$ ) como função do tempo para diferentes alturas de fonte. Para a altura  $H_s = 12.5\text{m}$  verifica-se um pico acentuado na área próxima à fonte. Com o crescimento da altura da fonte observa-se um decréscimo do pico de forma praticamente idêntica em todas as alturas.



**Figura 1:** Concentração superficial ( $z = 0$ ) em função do tempo para o experimento de Cabauw em diferentes alturas de fonte.

Já a Figura 2 mostra a concentração de poluentes em duas diferentes alturas acima do solo ( $z = 80$  e  $180$  m) em função do tempo para o experimento de Cabauw ( $H_s = 12.5$  m).



**Figura 2:** Concentração em função do tempo para o experimento de Cabauw com  $H_s = 12.5m$  em diferentes alturas acima do solo ( $z = 80$  e  $180$  m).

## 4. CONCLUSÕES

Neste estudo, a equação de difusão-advecção foi resolvida por um método analítico (técnica GILTT). Os resultados destas simulações foram realizados utilizando os dados obtidos no experimento de Cabauw para uma Camada Limite Estável.

Os resultados originados da comparação entre resultados das concentrações simuladas e observadas mostram que o modelo empregado reproduz adequadamente as medidas experimentais.

Este trabalho, por apresentar uma solução analítica para a concentração em um tempo qualquer, elimina o erro acumulado inerente aos métodos numéricos de integração no tempo, exceto pelo erro de truncamento. O objetivo do mesmo foi atingido, uma vez que foi apresentada a solução analítica do problema de dispersão de poluentes unidimensional.

**Agradecimentos:** Os autores agradecem ao apoio financeiro recebido pela FAPERGS e CNPq.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGTERBERG, R.; NIEUWSTADT, F. T. M.; DUUREN, van H.; HASEELTON, A. J.; KRIJT, G. D. Dispersion Experiments With Sulphur Hexafluoride From The 213m High Meteorological Mast At Cabauw In The Netherlands. **Royal Netherlands Meteorological Institute**, De Bilt, The Netherlands. 130 p., 1983.
- BUSKE, D.; COSTA, C. P. ; MOREIRA, D. M. ; VILHENA, M. T. . Simulação da dispersão de poluentes na camada limite estável usando os métodos GILTT e ADMM. In: **IX CONGRESSO DE METEOROLOGIA**, 2005, Buenos Aires (Argentina).
- DEGRAZIA, G.A. AND MORAES, O.L.L., 1992. A model for eddy diffusivity in a stable boundary layer. **Bound. Layer Meteor.** 58, 205-214.
- MOREIRA, D.M., VILHENA, M.T., BUSKE, D., TIRABASSI, T.. The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. **Atmos. Research**, 92 (2009) 1-17.
- VAN DUUREN, H.; NIEUWSTADT, F. T. M. Dispersion experiments from the 213 m high meteorological mast at Cabauw in the Netherlands. Proceedings of the 14th International Colloquium, Paris, France May 5-8. Benarie (Ed.) **Studies in Environmental Science**, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, v. 8, pp. 77-90, 1980.