CONTROLE ÓTIMO APLICADO AO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA PRESA-PREDADOR

JÉSSICA C. S. BUENO[1]; ALEXANDRE MOLTER[2];
LUCIANA R. PIOVESAN[3];FABIO S. BOTELHO[4];
[1]*Universidade Federal de Pelotas – jessica_bsaldivia@hotmail.com*
[2]*Universidade Federal de Pelotas – alexandre.molter@yahoo.com.br*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – lurpiovesan@gmail.com*
[4]*Universidade Federal de Santa Catarina – fabio.silva.botelho@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é formular e resolver o problema de controle ótimo utilizando um modelo de Lotka-Volterra presa-predador. O problema de controle será aplicado ao controle biológico de pragas que consiste em inserir predadores em meio às pragas, prejudiciais as plantações, com a finalidade de manter a população de pragas abaixo do nível de danos econômicos, bem como evitar a extinção das pragas, visto que se deseja o equilíbrio ecológico.

O modelo presa-predador de Lotka-Volterra foi formulado por Lotka em 1925 (LOTKA, 1925) e adaptado por Volterra em 1927 (VOLTERRA, 1927). Tal modelo retrata a interação interespecífica entre duas ou mais espécies. Neste trabalho serão consideradas duas espécies, sendo que o modelo matemático é descrito da seguinte forma:

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2),$$
$$\dot{x}_2 = x_2(-r_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2),$$

onde x_1 e x_2 representam a densidade de presas e predadores, respectivamente. Os termos r_1 e r_2 são as taxas de crescimento e mortalidade, respectivamente. Os termos a_{ij} com $i, j = 1,2$ representam os coeficientes de competição entre espécies.

Por meio de simulações numéricas se buscará manter os sistemas em níveis de pragas desejados para o equilíbrio biológico e abaixo de danos econômicos.

2. METODOLOGIA

Formulação do Problema

O modelo de Lotka-Volterra, com controle, pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-r_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + u, \end{aligned} \tag{1}$$

onde u será considerado uma função de controle linear que representa inserção ou retirada de predadores do meio. O problema de controle ótimo pode ser formulado da seguinte maneira: minimizar o funcional de custo quadrático

$$J(X,u) = \frac{1}{2}\int_0^t [X^T Q X + uRu]dt, \tag{2}$$

onde Q_{2X2} e R_{1X1} são matrizes semi-positiva definida e definida positiva, respectivamente, em relação ao estado $X = [x_1\ x_2]^T$e o controle u, sujeito ao sistema não-linear (1) e condições iniciais, em 0, e finais, em *t*, dadas por

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = x_{01}, & x_1(t) = x_{t1}, \\ x_2(0) = x_{02}, & x_2(t) = x_{t2}. \end{array}$$

Resolução do Problema

Linearizando (1) em torno de um ponto de equilíbrio desejado $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 r_1 - 2a_{11}\bar{x}_1 x_1 + a_{11}\bar{x}_1\bar{x}_1 - a_{12}\bar{x}_1 x_2 - a_{12}x_1\bar{x}_2 + a_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 r_2 - a_{21}x_1\bar{x}_2 - a_{21}\bar{x}_1 x_2 + a_{21}\bar{x}_1\bar{x}_2 - 2a_{22}x_2\bar{x}_2 + a_{22}\bar{x}_2\bar{x}_2 + u. \end{cases} \quad (3)$$

O Lagrangiano do problema de controle acima formulado é dado por (BOTELHO, 2014):

$$L(X,u,\lambda) = J(X,u) + \int_0^t \lambda_1[\ \dot{x}_1 - x_1(r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)]dt$$
$$+ \int_0^t \lambda_2[\ \dot{x}_2 - x_2(r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) - u]dt.$$

Reescrevendo *L* na forma linearizada (3) tem-se:

$$\bar{L}(X,u,\lambda) = J(X,u) + \bar{L}_1(X,\lambda_1) + \bar{L}_2(X,\lambda_2,u), \quad (4)$$

onde

$$\bar{L}_1(X,\lambda_1) = \int_0^t \lambda_1(\ \dot{x}_1 - x_1 r_1 + 2a_{11}\bar{x}_1 x_1 - a_{11}\bar{x}_1\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_1 x_2 + a_{12}x_1\bar{x}_2 - a_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2)dt$$

e

$$\bar{L}_2(X,\lambda_2,u) = \int_0^t \lambda_2(\ \dot{x}_2 - x_2 r_2 + a_{21}x_1\bar{x}_2 + a_{21}\bar{x}_1 x_2 - \dot{a}_{21}\bar{x}_1\bar{x}_2 + 2a_{22}x_2\bar{x}_2 - a_{22}\bar{x}_2\bar{x}_2 - u)dt.$$

Variando o funcional, no estado estacionário, buscam-se os níveis em que $\delta\bar{L}(X,u,\lambda) = 0$ em $[0,t]$. Assim, tem-se as variações:

- Em x_1: $\delta\bar{L}(X,u,\lambda) = (q_{11} + q_{21})x_1 - \dot{\lambda}_1 - r_1\lambda_1 + 2a_{11}\bar{x}_1\lambda_1 + a_{21}\bar{x}_2\lambda_2$.
- Em x_2: $\delta\bar{L}(X,u,\lambda) = (q_{12} + q_{22})x_2 - \dot{\lambda}_2 + a_{12}\bar{x}_1\lambda_2 + r_2\lambda_2 + a_{21}\bar{x}_1\lambda_2 + 2a_{22}\bar{x}_2\lambda_2$.

Daí, temos:

$$Q\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\dot{\lambda}_1 - r_1\lambda_1 + 2a_{11}\bar{x}_1\lambda_1 + a_{21}\bar{x}_2\lambda_2 \\ -\dot{\lambda}_2 + a_{12}\bar{x}_1\lambda_2 + r_2\lambda_2 + a_{21}\bar{x}_1\lambda_2 + 2a_{22}\bar{x}_2\lambda_2 \end{bmatrix} = V.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \end{bmatrix} = Q^{-1}V. \quad (5)$$

- Em u:

$$\delta\bar{L}(X,u,\lambda) = Ru - \lambda_2 = 0 \;\Rightarrow u = R^{-1}\lambda_2. \qquad (6)$$

Substituindo $x_1\,(\lambda)$ e $x_2\,(\lambda)$ em (4) é possível calcular λ_1 e λ_2 através das equações (5) e (6).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Aplicação no Controle Biológico de Pragas

O modelo com controle pode ser aplicado a uma lavoura de milho, sendo a presa, a praga do milho, e o predador, um inimigo natural desta presa.

Para esta aplicação consideraram-se os seguintes parâmetros (BUENO, MOLTER, PIOVESAN, 2014) no sistema (1):

r_1	r_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
0.15	0.1	0.0009	0.036	0.0015	0

Tabela 1

Considerou-se, ainda, que $\bar{x}_1 = 6$ e $\bar{x}_2 = 4$. Foram realizadas simulações numéricas no *software Matlab* para verificar a eficiência da metodologia proposta. As derivadas do sistema (4) foram resolvidas utilizando o Método de Diferenças Finitas e as integrais foram resolvidas numericamente.

Na Figura 1 é apresentada a dinâmica do sistema de Lotka-Volterra (1), com os parâmetros da Tabela 1, sem controle, com condições iniciais em *(2,2).*

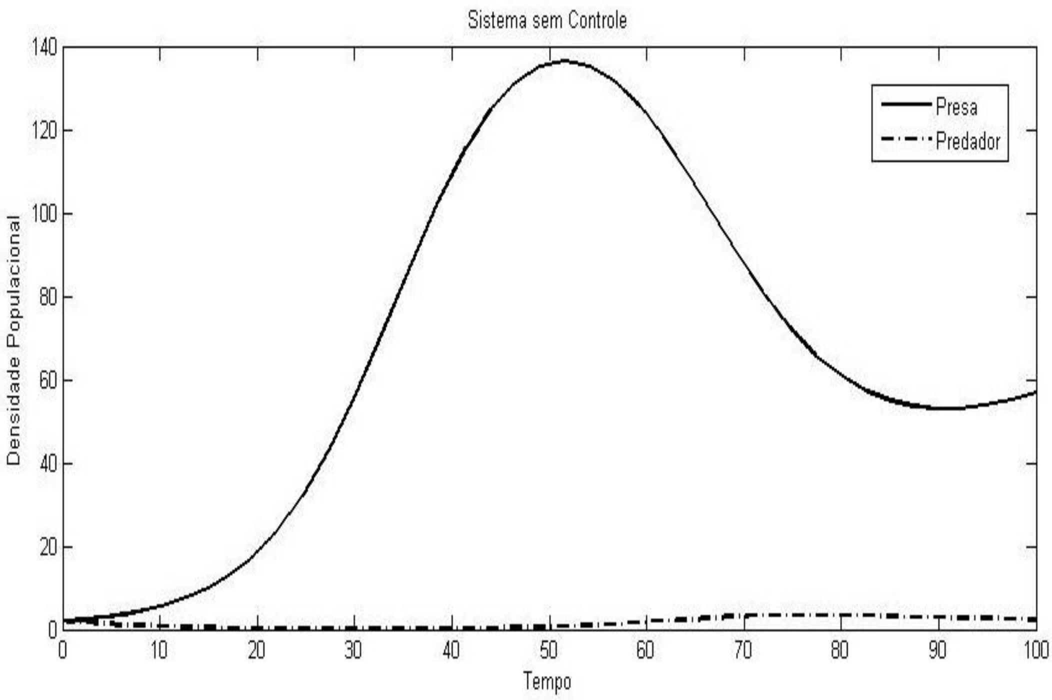

Figura 1

Pode-se observar pela Figura 1 que o sistema estabiliza em um nível de pragas superior ao desejado, consequentemente, ocasionando danos à lavoura.

As trajetórias temporais do sistema de Lotka-Volterra com controle são apresentadas na Figura 2, com condições iniciais em *(2,2)*.

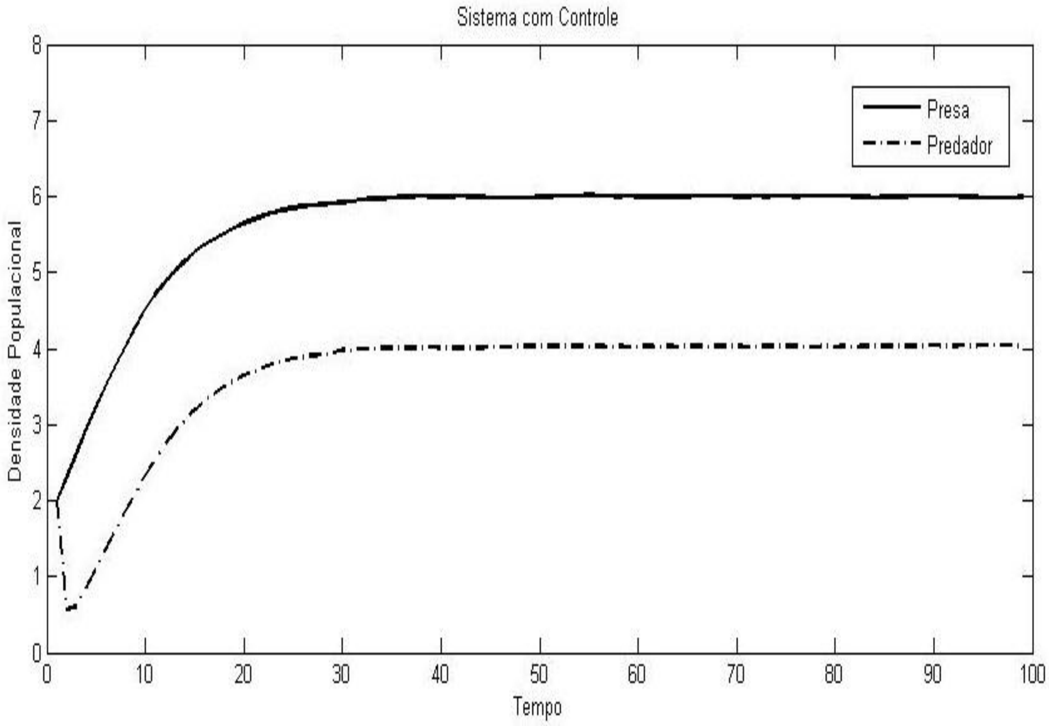

Figura 2

Pela Figura 2 é possível notar que o sistema foi controlado e as trajetórias atingem o equilíbrio em aproximadamente 20 dias.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho propôs a formulação e resolução de um problema de controle ótimo para o sistema de Lotka-Volterra presa-predador com aplicação no controle biológico de pragas. O controle, assim desenvolvido, apresentou eficiência à medida que estabilizou as trajetórias temporais em um nível desejado de densidade de pragas, fazendo com que o sistema ficasse equilibrado biologicamente e abaixo do limiar de danos econômicos.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOTELHO, F. Functional Analysis and Applied Optimization in Banach Spaces.Springer, 2014.

BUENO, J. C. S. MOLTER, A. PIOVESAN, L. R. Modelagem Matemática Aplicada ao Controle Biológico de Pragas em Lavouras de Milho. In: XX Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, Bagé-RS, Brasil, 2014.

LOTKA, A. J. Elements of physical biology. Baltimore, Williams and Wilkins, 1925.

VOLTERRA, V. Variazioni e fluttuazionidel numero d'individui in specieanimaliconviventi. Mem. R, Com.Tolassogr, V. 131, p. 31-113, 1927.