

OBTENÇÃO DE COTAS VARIACIONAIS PARA O COMPORTAMENTO EFETIVO DE UMA BARRA BIFÁSICA PERIÓDICA NÃO LINEAR

ROBERTO MARTINS DA SILVA DÉCIO JÚNIOR¹;
LESLIE DARIEN PÉREZ FERNÁNDEZ³

¹*Universidade Federal de Pelotas – roberto.decio.jr@gmail.com*

³*Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

Um compósito é um material heterogêneo formado por arranjo microscópico de materiais homogêneos diferentes. O mercado de compósitos tem crescido de forma constante nas últimas décadas e inclui diversas aplicações aeroespaciais, biomédicas, na indústria automobilística, bem como na infraestrutura civil (LEVY NETO, 2006). Isto se deve a que as propriedades físicas efetivas (macroscópicas) dos compósitos reúnem e melhoram as propriedades dos seus materiais componentes.

Uma alternativa para encontrar a lei do comportamento efetivo de um compósito, por exemplo, a tensão em função da deformação e da posição, é estimando cotas (superiores e inferiores). A maioria dos trabalhos desse tipo se ocupa em encontrar limites para a energia efetiva no compósito, e então diferenciando tais cotas, chega-se a uma estimativa das cotas para o a lei efetiva da tensão. Entretanto, como derivando-se uma aproximação de uma função não obtém-se necessariamente uma aproximação de sua derivada, tais métodos não provém rigorosas cotas para a lei do comportamento efetivo.

Diante disso, este trabalho objetiva encontrar, de forma direta, cotas variacionais para a lei efetiva da tensão numa barra bifásica periódica não linear, comparando os resultados encontrados com a lei efetiva obtida através de outro método – o Método de Homogeneização Assintótica.

2. METODOLOGIA

Formulação do Problema

Seja uma barra bifásica periódica Ω , formada pela replicação da célula periódica $\Omega_i^* = \Omega_{2i-1} \cup \Omega_{2i}$ com $i \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, deteremos nosso estudo em uma única célula de peridiocidade, a saber, $\Omega_1^* = \Omega_1 \cup \Omega_2$. A lei da tensão $\sigma(\varepsilon, x)$ na barra, em função da posição x e da deformação ε , é dada por:

$$\sigma(\varepsilon, x) = \Pi_1(x).\sigma_1(\varepsilon) + \Pi_2(x).\sigma_2(\varepsilon) \quad (1)$$

sendo $\Pi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i \\ 0, & x \notin \Omega_i \end{cases}$ a função indicadora.

A leis efetiva relacionam a média da tensão ($\bar{\sigma}$) com a média da deformação ($\bar{\varepsilon}$), dadas por

$$\bar{\sigma} = \int_{\Omega} \sigma(x) dx, \quad \bar{\varepsilon} = \int_{\Omega} \varepsilon(x) dx \quad (2)$$

ou ainda, podemos escrever:

$$\sigma^e = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}) \quad (3)$$

Segundo MILTON; SERKOV (2000) e TALBOT; WILLIS (2004), define-se três conjuntos: K_r , $K(x)$ e para a célula a ser estudada, sendo

$$\begin{aligned} K_r &= \{(\sigma, \varepsilon) \mid \sigma = \sigma_r(\varepsilon, x)\} \\ K(x) &= \{(\sigma, \varepsilon) \mid \sigma = \Pi_1(x) \cdot \sigma_1(\varepsilon) + \Pi_2(x) \cdot \sigma_2(\varepsilon)\} \\ K &= \{(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) \mid \bar{\sigma} = \sigma^e(\bar{\varepsilon})\} \end{aligned} \quad (4)$$

Define-se também um potencial local $U_r(\sigma, \varepsilon)$ e $U(x, \sigma, \varepsilon)$, como segue abaixo.

$$U_r(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} 0, (\sigma, \varepsilon) \in K_r \\ +\infty, (\sigma, \varepsilon) \notin K_r \end{cases}, \quad U(x, \sigma, \varepsilon) = \begin{cases} 0, (x, \sigma, \varepsilon) \in K(x) \\ +\infty, (x, \sigma, \varepsilon) \notin K(x) \end{cases} \quad (5)$$

Em PEIGNEY (2005) define-se um potencial global $U^e(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon})$, pelo Princípio da Mínima Energia, como:

$$U^e(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) = \inf_{(\sigma, \varepsilon) \in S(\bar{\varepsilon}) \times T(\bar{\sigma})} \langle U(x, \sigma, \varepsilon) \rangle \quad (6)$$

sendo $S(\bar{\varepsilon}) = \left\{ \varepsilon \mid \exists u \mid \frac{du}{dx} = \varepsilon, u = \bar{\varepsilon}x, x \in \partial\Omega \right\}$ e $T(\bar{\sigma}) = \left\{ \sigma \mid \frac{d\sigma}{dx} = 0, \langle \sigma \rangle = \bar{\sigma} \right\}$. Além

disto, $\langle \cdot \rangle$ é o operador média definido como $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\cdot) dx$.

Introduz-se então um compósito de comparação com potencial

$$U^0_r(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{2} b_r^0 \sigma^2 + \frac{1}{2} a_r^0 \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \varepsilon \sigma \quad (7)$$

onde a_r^0 e b_r^0 são tensores positivos arbitrários, característicos do compósito de comparação, com $b_r^0 \neq (a_r^0)^{-1}$ e $r = 1, 2$.

Aplicando a Transformada de Legendre em $(U - U^0)(x, \sigma, \varepsilon)$ terá-se $(U - U^0)^*(x, \tau, \eta)$, para (τ, η) arbitrários, da seguinte forma:

$$(U - U^0)^*(x, \tau, \eta) = \sup_{\sigma, \varepsilon} \left\{ \tau \varepsilon + \eta \sigma - (U - U^0)(x, \sigma, \varepsilon) \right\} \quad (8)$$

Logo, tem-se que:

$$U(x, \sigma, \varepsilon) \geq \tau \varepsilon + \eta \sigma - (U - U^0)^*(x, \tau, \eta) + U^0(x, \sigma, \varepsilon) \quad (9)$$

Sendo assim, de (6), conclui-se que:

$$U^e(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) \geq \inf_{(\sigma, \varepsilon) \in S(\bar{\varepsilon}) \times T(\bar{\sigma})} \left\{ \tau \varepsilon + \eta \sigma - (U - U^0)^*(x, \tau, \eta) + U^0(x, \sigma, \varepsilon) \right\} \quad (10)$$

Como $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) \in K$, tem-se $U^e(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) = 0$, logo, pode-se escrever (10) como:

$$0 \geq \langle \tau \rangle \bar{\varepsilon} + \langle \eta \rangle \bar{\sigma} + \frac{1}{2} \langle b_r^0 \rangle \bar{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \langle a_r^0 \rangle \bar{\varepsilon}^2 - \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \bar{\sigma} - \langle (U - U^0)^*(x, \tau, \eta) \rangle \quad (11)$$

com, sendo c_1 a concentração da fase 1, e c_2 , da fase 2:

$$\langle (U - U^0)^*(x, \tau, \eta) \rangle = c_1 (U_1 - U_1^0)^*(x, \tau, \eta) + c_2 (U_2 - U_2^0)^*(x, \tau, \eta) \quad (12)$$

Obtenção das cotas

Para obter as cotas para $\sigma^e = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$, basta isolar $\bar{\sigma}$ na desigualdade (11), otimizando os valores de a_r^0 , b_r^0 , τ e η . Neste trabalho, será seguido como no trabalho de MILTON; SERKOV (2000), onde estudou-se o caso especial em que $a_r^0 = b_r^0 = 0$, além de tomar-se $\tau = 0$ e $\eta = t\varepsilon$, sendo t um parâmetro real.

Observe que aplicando tais condições em (11), tem-se:

$$\left(\frac{1}{2} - t\right) \bar{\sigma} \geq -\frac{1}{\varepsilon} \langle (U - U^0)^*(x, \tau, \eta) \rangle \quad (13)$$

Dessa forma, para obter as cotas superior e inferior ótimas para $\sigma^e = \bar{\sigma}(\varepsilon)$, basta tomar valores de t , maximizando e minimizando em relação a este parâmetro, respectivamente, as cotas inferiores e superiores obtidas.

Método de Homogeneização Assintótica – MHA

A lei efetiva para $\sigma^e = \bar{\sigma}(\varepsilon)$ será obtida através do MHA conforme mostrado em DÉCIO JÚNIOR; FERNANDEZ (2004). Para maiores detalhes, ver seção 7 do capítulo 3 de BAKHVALOV; PANASENKO (1989) e capítulo 2 de FERNÁNDEZ (2006).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para aplicação do método e comparação com o MHA, utilizaremos como exemplo o caso de uma barra bifásica periódica não linear, com contato perfeito entre as fases, com a seguinte relação constitutiva para a tensão:

$$\sigma(\varepsilon, x) = \begin{cases} \sigma_1(\varepsilon) = a_1 \varepsilon, & x \in \Omega_{2i-1} \\ \sigma_2(\varepsilon) = a_2 \varepsilon^2, & x \in \Omega_{2i} \end{cases} \quad (14)$$

onde $i \in \mathbb{Z}$ e a_1 e a_2 são as propriedades elásticas dos materiais constituintes.

Aplicando o método à essa relação constitutiva, teremos as seguintes cotas para $\sigma^e = \bar{\sigma}(\varepsilon)$ (normalizada por $a_1 \bar{\varepsilon}$):

$$\frac{\sigma^e}{a_1 \bar{\varepsilon}} \leq \frac{2t^2}{1-2t} \left(\frac{c_1}{2} + \frac{16}{27} c_2 \lambda \bar{\varepsilon} t \right) \quad (15)$$

Onde para $t = t_1 = \frac{1}{8}(-z + 3 - \sqrt{z^2 + 10z + 9})$ tem-se a cota superior, e para $t = t_2 = \frac{1}{8}(-z + 3 + \sqrt{z^2 + 10z + 9})$, a cota inferior. Além disso, $z = \frac{27c_1}{16c_2 \bar{\varepsilon} \lambda}$ e $\lambda = \frac{a_2}{a_1}$.

Para esta mesma lei, pelo MHA, obtemos a seguinte lei efetiva:

$$\frac{\sigma^e}{a_1 \bar{\varepsilon}} = \frac{1}{c_1} \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1 \bar{\varepsilon}} \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{c_1 \bar{\varepsilon}}{c_2^2}} - \frac{1}{2} \right) \right) \quad (16)$$

A fim de ilustrar graficamente essas aproximações, vamos considerar um caso particular com $\lambda = 2$, $c_1 = c_2 = 0,5$.

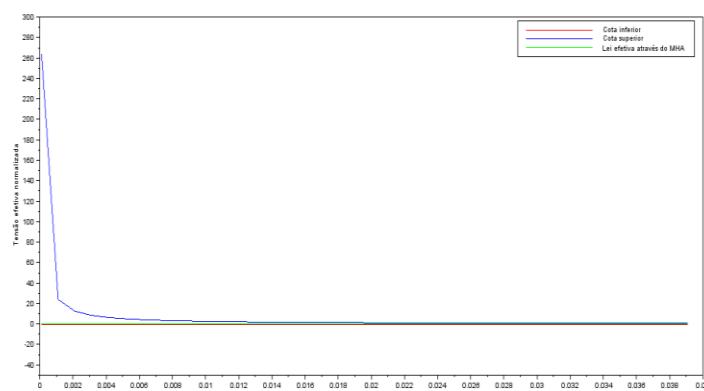


Figura 1: Cotas superiores e inferiores e lei efetiva obtida através do MHA

4. CONCLUSÕES

Conseguiu-se obter com sucesso as cotas para a lei efetiva da tensão no caso considerado, e ainda sua veracidade foi verificada através da lei efetiva obtida com o MHA. Entretanto, acredita-se que é possível aperfeiçoar essas cotas, a fim de obter-se aproximações melhores, e este será o foco dos estudos posteriores.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DÉCIO JÚNIOR, R. M. D. S. FERNANDEZ, L. D. P. Comportamento efetivo de uma barra bifásica periódica não linear, através do Método de Homogeneização Assintótica. In: **CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**, 18., Pelotas, 2014. Anais do XVIII Congresso de Iniciação científica da Universidade Federal de Pelotas. Disponível em <<http://www2.ufpel.edu.br/cic/2014/?sec=anais&area=ce>> (Acesso em 01 de junho de 2015).

FERNANDEZ, L. D. P. **Procedimientos asintóticos y variacionales de homogeneización en la evaluación del comportamiento efectivo de compuestos elásticos no lineales**. Janeiro, 2006. Dissertação (Mestrado em Ciências Matemáticas) – Curso de Pós-graduação em Ciências Matemáticas, Universidade de Havana.

LEVY NETO, F.; PARDINI, L. C. **Compósitos estruturais: ciência e tecnologia**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

MILTON, G. W.; SERKOV, S. K. Bounding the current in nonlinear conducting composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**. v.48, p. 1295–1324, 2000.

BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. **Homogenization: Averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

PEIGNEY, M. A pattern-based method for bounding the effective response of a nonlinear composite. **Journal of the Mechanics and Physics of solids**. v.53, p. 923-948, 2005.

TALBOT, D. R. S., WILLIS, J. R. Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite. **Proceedings of the Royal Society of London**. v.460, p. 2705-2723, 2004.