HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA DE UM PROBLEMA ELÍPTICO MULTIDIMENSIONAL

MARCOS PINHEIRO DE LIMA[1]; LUANA LAZZARI[2]; LESLIE DARIEN PÉREZ FERNÁNDEZ[3]; JULIÁN BRAVO CASTILLERO[4]

[1]Universidade Federal de Pelotas – marcos.p.lima@hotmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – luana-lazzari@hotmail.com
[3]Universidade Federal de Pelotas – leslie.fernandez@ufpel.edu.br
[4]Universidad de La Havana– jbravo@matcom.uh.cu

1. INTRODUÇÃO

Fenômenos ocorridos em meios micro heterogêneos e periódicos são normalmente descritos por equações diferenciais com coeficientes rapidamente oscilantes (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Geralmente os fenômenos físicos de interesse ocorrem na *microescala*, a qual pode ser de ordem de décimos de nanômetros até da ordem de metros. Nestas situações a escala microscópica l é muito maior que a escala molecular e muito menor que o comprimento L da escala macroscópica, ou seja, $l \ll L$. Em processos neste tipo de meio há uma separação de escala estrutural caracterizada pelo parâmetro geométrico $\varepsilon = l/L$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Em tal circunstância o material heterogêneo pode ser visto como um contínuo na microescala, sujeito a análise clássica e propriedades macroscópicas ou *efetivas* (TORQUATO, 2002). Em particular, meios periódicos são aqueles nos quais a heterogeneidade pode ser reproduzida mediante a replicação periódica de um elemento recorrente, chamado de célula básica.

Tendo em vista essas características, para o presente trabalho propõe-se construir uma lei que descreva o comportamento efetivo de um meio condutivo de temperatura micro heterogêneo, periódico, estático e linear, via Método de Homogeneização Assintótica – MHA. O MHA consiste na transformação do problema de um meio heterogêneo, periódico, com coeficientes rapidamente oscilantes (chamado problema original), em outro sobre um meio homogêneo equivalente ao heterogêneo (chamado problema homogeneizado) que geralmente não depende da variável rápida. Para ilustrar os resultados obtidos da homogeneização, tais como os problemas locais, a matriz dos coeficientes efetivos e a solução do problema homogeneizado considera-se um exemplo.

Seja um campo de temperatura descrito pela equação de (1) e que satisfaz as condições (2)

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jl}^{\varepsilon}(x) \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x_l} \right) = f(x),\ x \in \Omega, & (1) \\ u^{\varepsilon} = 0,\ x \in \partial\Omega, & (2) \end{cases}$$

onde $f \equiv f(x) \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ é a fonte de calor e $u^{\varepsilon} \equiv u^{\varepsilon} \in C^{2}(\overline{\Omega})$ é a temperatura na posição $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x \in \overline{\Omega} = [0,1]^3$. Considere que a propriedade do meio seja isotrópica, logo o tensor de condutividade térmica é da forma $A_{jl}^{\varepsilon}(x) = A(x/\varepsilon)\delta_{jl} = A(y)\delta_{jl}$, $j,l = 1,2,3$, simétrico, $A_{jl}(y) = A_{lj}(y)$ e de caráter definido positivo, $A_{jl}(y)\eta_j\eta_l \geq c|\eta|^2$, $\forall \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, onde c é uma constante positiva, δ_{jl} é o delta de Kronecker. E ainda, as funções $A_{jl}(y)$ estão definidas $\forall y \in Y$, $A^{\varepsilon}_{jl} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ e são εY-periódica ($Y=[0,1]^3$ é a dimensão da célula básica).

2. METODOLOGIA

De modo a construir uma solução assintótica formal (s.a.f.) para o problema original, propõe-se como solução uma expansão assintótica (e.a.) de u^{ε} da forma $u^{(2)}(x,y,\varepsilon)=u_0(x,y)+\varepsilon u_1(x,y)+\varepsilon^2 u_2(x,y)$. Substituindo a e.a. proposta no problema original, aplicando a regra da cadeia total e agrupando em potências de ε, tem-se que $u^{(2)}$ será uma s.a.f. de u^{ε} se as seguintes equações forem satisfeitas (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989):

$$\varepsilon^{-2}: L_{yy}u_0 = 0, \tag{3}$$

$$\varepsilon^{-1}: L_{yy}u_1 = -L_{xy}u_0 - L_{yx}u_0, \tag{4}$$

$$\varepsilon^{0}: L_{yy}u_2 = -L_{xx}u_0 - L_{yx}u_1 - L_{xy}u_1 + f, \tag{5}$$

onde $L_{\alpha\beta} = \sum_{j,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_{jl}(y)\frac{\partial}{\partial \beta_l}\right)$, ou seja, deve-se obter u_0, u_1 e u_2 que satisfaçam as equações (3)-(5).

Para garantir que as soluções dos problemas (3)-(5) sejam 1-periódicas com respeito a variável y utiliza-se o seguinte *Lema*:

Sejam $A_{jl}(y)$ e $F(y)$ funções diferenciáveis e Y-periódicas e A_{jl} satisfaz as condições de simetria e positividade. Então uma condição necessária e suficiente para uma solução 1-periódica da equação $L_{yy}N = F(y)$ existir é

$$\left\langle F(y)\right\rangle = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 F(y)\,dy_1 dy_2 dy_3 = 0, \tag{6}$$

onde $L_{yy} = \sum_{j,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(A_{jl}(y)\frac{\partial}{\partial y_l}\right)$.

E ainda, a solução geral 1-periódica da $LN = F(y)$ é escrita como $N(y) = \overline{N}(y) + C$ onde $\overline{N}$ é a solução de $LN = F(y)$ com média igual a zero sob o período: $\left\langle \overline{N}(y)\right\rangle = 0$, C é uma constante arbitrária (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Solucionado as equações (3)-(5) obtém-se que $u_0(x,y)=u_0(x)$, os p problemas locais

$$\begin{cases} \sum_{j,l,p=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(A_{jp} + A_{jl}\frac{\partial N_p}{\partial y_l}\right) = 0, \\ \left\langle N_p \right\rangle = 0, \end{cases} \tag{7}$$

e a condição de existência de u_2 1-periódica, chamada de equação do problema homogeneizado:

$$\sum_{j,p=1}^{3} \hat{A}_{jp} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_p} = f \tag{8}$$

onde o coeficiente efetivo é $\hat{A}_{jp} = \left\langle A_{jp} + \sum_{l=1}^{3} A_{jl} \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \right\rangle$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para ilustrar os resultados obtidos na seção anterior considera-se o coeficiente $A_{jl}(y) = (1 + 0.25\sin(2\pi y_1)\sin(2\pi y_2))\delta_{jl}$, condições de contorno tipo Dirichlet e o termo fonte $f = -1$.

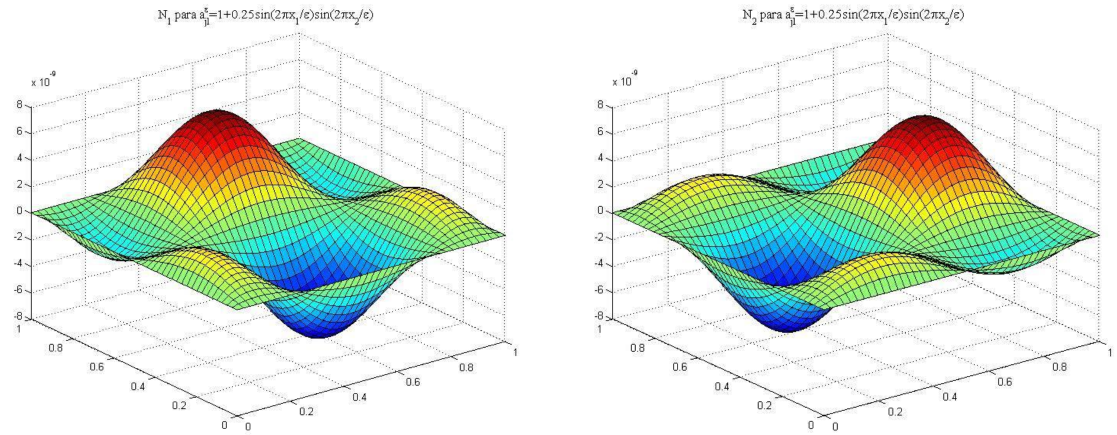
Para obter a solução do problema homogeneizado deve-se conhecer a matriz dos coeficientes efetivos obtida por

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{1p} \\ \hat{A}_{2p} \\ \hat{A}_{3p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle A \rangle_{1p} \\ \langle A \rangle_{2p} \\ \langle A \rangle_{3p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left\langle A_{11} \frac{\partial N_p}{\partial y_1} + A_{12} \frac{\partial N_p}{\partial y_2} + A_{13} \frac{\partial N_p}{\partial y_3} \right\rangle \\ \left\langle A_{21} \frac{\partial N_p}{\partial y_1} + A_{22} \frac{\partial N_p}{\partial y_2} + A_{23} \frac{\partial N_p}{\partial y_3} \right\rangle \\ \left\langle A_{31} \frac{\partial N_p}{\partial y_1} + A_{32} \frac{\partial N_p}{\partial y_2} + A_{33} \frac{\partial N_p}{\partial y_3} \right\rangle \end{bmatrix} \tag{9}$$

onde $p = 1, 2, 3$ e N_p são as soluções dos problemas locais. O cálculo do termo $\left\langle A_{jl} \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \right\rangle$ para obtenção dos coeficientes efetivos é simplificado utilizando a seguinte relação de Green: $\nabla \cdot (gG) = (g\nabla \cdot G) + G \cdot \nabla g$, onde g é uma função escalar e G uma função vetorial, logo o cálculo para coeficiente efetivo se resume a: $\hat{A}_{jp} = \langle A \rangle \delta_{jp} - \left\langle N_p \sum_{l,j=1}^{3} \frac{\partial A_{jl}}{\partial y_l} \right\rangle$.

Portanto, antes de obter a solução do problema homogeneizado, primeiramente os problemas locais foram resolvidos através do método de diferenças finitas, onde as soluções N_1 e N_2 podem ser visualizadas na figura abaixo:

Soluções dos problemas locais para N_1 e N_2.



onde $N_3 = 0$. A partir desses resultados, pelo método de Simpson, obteve-se a seguinte matriz de coeficientes efetivos

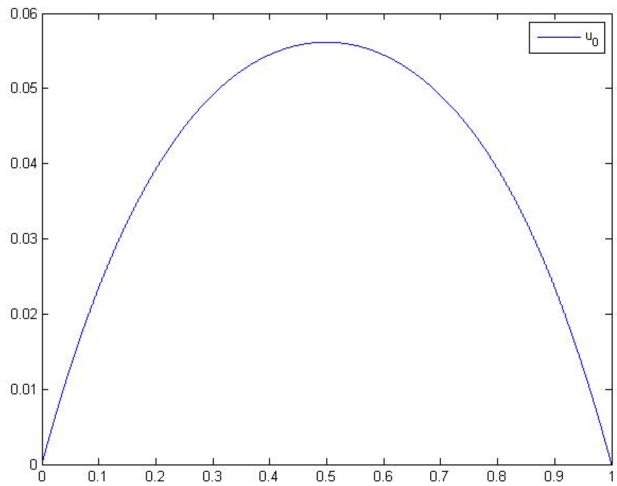
$$\left(\hat{A}_{jp}\right)_{1\leq j,p\leq 3} = \begin{bmatrix} 9.9999\cdot 10^{-1} & -2.0181\cdot 10^{-11} & 0 \\ -3.9174\cdot 10^{-10} & 9.9999\cdot 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Assim, considerando estes resultados na prática sejam $\hat{A}_{jl} = \delta_{jl}$, determinou-se a solução do problema homogeneizado, a qual foi obtida por separação de variáveis, ou seja,

$$u_0 = \frac{64}{\pi^5}\sum_{i,j,k\geq 1}\frac{\sin((2i-1)\pi x_i)\sin((2j-1)\pi x_j)\sin((2k-1)\pi x_k)}{\left((2i-1)^2+(2j-1)^2+(2k-1)^2\right)\left((2i-1)(2j-1)(2k-1)^2\right)}, \qquad (11)$$

e que pode ser visualiza na seguinte figura:

Solução do problema homogeneizado para $x_2 = 0.5$ e $x_3 = 0.5$.



4. CONCLUSÕES

A partir dos resultados pode-se perceber que as propriedades efetivas preservam o caráter definido positivo, a simetria e o comportamento isotrópico do meio heterogêneo. Além disso a busca da solução do problema original com coeficientes rapidamente oscilantes, seria difícil comparado ao problema homogeneizado que apresenta coeficientes constantes.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPERGS/CAPES pelo apoio financeiro para o desenvolvimento das atividades científicas e ao apoio do projeto CAPES nº 88881.030424/2013-01 intitulado "Desenvolvimento e Aplicações de Métodos Matemáticos de Homogeneização".

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. **Homogenisation**: averaging processes in periodic media. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

TORQUATO, S. **Random heterogeneous materials**: microstructure and macroscopic properties. New York: Springer, 2002.