APROXIMAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DE NÊUTRONS EM GEOMETRIA CILÍNDRICA COM ESPALHAMENTO LINEARMENTE ANISOTRÓPICO

LUANA LAZZARI[1]; GLÊNIO AGUIAR GONÇALVES[2];
CLAUDIO ZEN PETERSEN[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas – luana-lazzari@hotmail.com
[2]Universidade Federal de Pelotas – gleniogoncalves@yahoo.com.br
[3] Universidade Federal de Pelotas – claudiopetersen@yahoo.com.br

1. INTRODUÇÃO

A equação de transporte de nêutrons pode ser usada em diversas áreas como a da geração de energia, a da medicina e da agricultura. Ela descreve a distribuição espacial, direcional, energética e temporal dos nêutrons em um meio.

Considera-se neste trabalho a equação de transporte de nêutrons desenvolvida por MITSIS (1963) para um cilindro infinito com simetria azimutal e espalhamento isotrópico. Posteriormente SIEWERT e THOMAS (1984) incluíram a essa equação o termo de fonte externa isotrópica e condição de fluxo incidente no contorno. Em GONÇALVES (2003), a solução desse problema é determinada através do método HTS_N. Este método consiste em aplicar o método S_N na discretização da variável angular e, a seguir, aplicar a transformada de Hankel de ordem zero para resolver o sistema de equações diferenciais resultante.

Neste trabalho propõe-se a construção heurística do termo de espalhamento linearmente anisotrópico na equação de transporte proposta por Mitsis. Esta construção baseia-se na hipótese de que os autovalores positivos que compõem a solução são idênticos aos determinados por CASE (1967) para um problema unidimensional, em geometria cartesiana, em um meio infinito, para o mesmo grau de anisotropia. A solução proposta neste desenvolvimento é obtida através do método HTS_N. Os resultados para o problema unidimensional em geometria cilíndrica são comparados com o problema em geometria cartesiana. Para tal, considera-se um cilindro com raio grande e uma placa com comprimento grande quando comparados ao livre caminho médio do nêutron no meio considerado.

2. METODOLOGIA

A equação de transporte de nêutrons proposta por Mitsis para um cilindro infinito com simetria azimutal, espalhamento isotrópico, fonte externa isotrópica e fluxo incidente no contorno é escrita como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{\mu^2}\right)\Phi(r,\mu)=-c\int_0^1\Phi(r,\mu')\frac{d\mu'}{\mu'^2}-(1-c)\big(Q(r)-F\big), \qquad (1)$$

onde $\Phi(r,\mu)$ é o pseudofluxo angular, μ é a pseudovariável angular, c é o número médio de nêutrons que emergem por colisão, $Q(r)$ é a fonte externa e F é o fluxo incidente no contorno. A equação (1) está sujeita a condição de contorno:

$$K_1(R/\mu)\varphi(R)+\mu K_0(R/\mu)\left.\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\right|_{r=R}=0, \qquad (2)$$

na qual K_1 e K_0 são funções de Bessel e R raio do cilindro. O fluxo escalar de nêutrons para a equação (1) é dado pela integral definida como:

$$\psi(r) = \int_0^1 \Phi(r,\mu')\frac{d\mu'}{\mu'^2}. \tag{3}$$

Neste trabalho propõem-se acrescer um termo à equação de transporte (1) para representar a componente de espalhamento linearmente anisotrópico. Desta forma, a equação (1) é reescrita como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu^2}\right)\Phi(r,\mu) = -\left(c + 3cf_1(1-c)\mu^2\right)\int_0^1 \Phi(r,\mu')\frac{d\mu'}{\mu'^2} - (1-c)\left(Q(r)-F\right), \tag{4}$$

na qual cf_1 é a seção de choque de espalhamento do termo linearmente anisotrópico. A solução desta equação é expressa pela combinação linear das autofunções

$$\Phi_\nu(r,\mu) = \left(\mu^2\nu^2 c\frac{1+3f_1(1-c)\mu^2}{\nu^2-\mu^2} + \lambda(\nu)\delta(\mu-\nu)\right) I_0\left(\frac{r}{\nu}\right), \tag{5}$$

onde δ é a função de delta de Dirac, λ é uma função arbitrária a ser determinada e I_0 é uma função de Bessel de primeiro tipo. A construção da equação íntegro-diferencial (4) baseou-se no fato de que a normalização da solução (5) resulta na equação algébrica

$$\frac{\nu}{2}\left(3(1-c)cf_1\nu^2 + c\right)\ln\left(\frac{\nu+1}{\nu-1}\right) - 3(1-c)cf_1\nu^2 - 1 = \lambda(\nu), \tag{6}$$

que é idêntica à geradora dos autovalores do caso cartesiano unidimensional com espalhamento linearmente anisotrópico. Em outras palavras, a ideia central na proposta de formulação da equação íntegro-diferencial (4) é que o termo que expressa o espalhamento linearmente anisotrópico da solução (5), quando normalizada pela integral (3), gere uma expressão idêntica à gerada pelo problema cartesiano. O pseudofluxo angular é dado pela combinação linear das autofunções (5) e o fluxo escalar é o resultado da integral dos pseudofluxos angulares, conforme a equação (3). Assim, o fluxo escalar é:

$$\psi(r) = A(\nu_0)I_0\left(\frac{r}{\nu_0}\right) + \int_0^1 A(\nu)I_0\left(\frac{r}{\nu}\right)d\nu, \tag{7}$$

A solução analítica dada pela (7) é bastante importante para descrever o comportamento teórico do fluxo escalar em função da variação dos parâmetros físicos do meio. Na prática, utilizam-se métodos matemáticos para resolver a equação íntegro-diferencial (4). Neste trabalho, usa-se o método HTS_N e para tal, discretiza-se a pseudovariável angular para então usar a transformada de Hankel de ordem zero. Assim, a equação íntegro-diferencial (1) é reescrita como,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mu_j^2}\right)\varphi_j(r) = -\left(c + 3cf_1(1-c)\mu_j^2\right)\sum_{i=1}^{N/2} w_i\frac{\varphi_i(r)}{\mu_i^2}, \tag{8}$$

onde μ_j são as raízes do polinômio de Legendre de ordem N e w_j são os pesos da quadratura de Gauss de ordem N. Nessa equação discretizada, aplica-se a transformada de Hankel e se obtêm a equação transformada

$$\left(-\xi^2 - \frac{1}{\mu_j^2}\right)\overline{\varphi}_j(\xi) = -\left(c + 3cf_1(1-c)\mu_j^2\right)\sum_{i=1}^{N/2} w_i\frac{\overline{\varphi}_i(\xi)}{\mu_i^2} - (1-c)\left[\overline{S}(\xi)\right], \tag{9}$$

em que $\overline{\varphi}_j(\xi)$ é a transformada de Hankel de $\varphi_j(r)$. Para facilitar a manipulação algébrica, escreve-se a equação (9) na forma matricial:

$$\left(\xi^2 \mathrm{I} + \mathrm{A}\right)\overline{\Phi}(\xi) = (1-c)\left[\overline{\mathrm{S}}(\xi)\right], \tag{10}$$

em que I é a matriz identidade e A é a matriz espalhamento (de ordem $N/2 \times N/2$). Se a matriz A for diagonalizada na forma $A = UAU^{-1}$, então a equação (10) é reescrita como,

$$\overline{\Phi}(\xi) = \mathrm{U}\left(\xi^2 \mathrm{I} + \mathrm{D}\right)^{-1} \mathrm{U}^{-1}(1-c)\left[\overline{\mathrm{S}}(\xi)\right]. \tag{11}$$

Quando aplica-se a transformada inversa de Hankel obtém-se,

$$\varphi_j(r) = \sum_{k}^{N/2} u_{jk} I_0(\alpha_k r) B_{kk} + \tag{12}$$

$$(1-c)\sum_{i,k}^{N/2} u_{jk} v_{ki}\left\{K_0(\alpha_k r)\int_0^r r' I_0(\alpha_k r')S(r')dr' + I_0(\alpha_k r)\int_r^R r' K_0(\alpha_k r')S(r')dr'\right\},$$

para o *j-ésimo* elemento do vetor solução. Nesta solução, α são os autovalores que compõem a matriz D, u e v são os elementos das matrizes U e U^{-1}, respectivamente e B são os coeficientes da solução da equação homogênea que devem ser determinados a partir da condição de contorno.

A condição de contorno para este novo problema envolvendo espalhamento linearmente anisotrópico é construída a partir da aproximação de primeira ordem para o fluxo angular. Essa condição de contorno implica que a corrente de nêutrons é nula no contorno do cilindro, conhecida como condição de Marshak (BELL; GLASSTONE, 1970), isto é,

$$\int_0^1 \mu\left[\frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{3}{2}\mu J(0)\right]d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-1}^0 \mu\left[\frac{1}{2}\varphi(L) + \frac{3}{2}\mu J(L)\right]d\mu = 0. \tag{13}$$

O desenvolvimento realizado a partir destas condições mostra que a aproximação da condição de contorno é dada por

$$\varphi_j(R) + 2D\frac{d}{dr}\varphi_j(r)\Big|_{r=R} = 0, \tag{14}$$

onde $2D = \mu_j\left(3\nu^2(1-c)cf_1 + 1\right)$. E é esta aproximação que será usada na obtenção do fluxo escalar com espalhamento linearmente anisotrópico.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresenta-se a seguir a comparação dos resultados entre o problema em geometria cilíndrica com anisotropia linear e o problema em geometria cilíndrica com mesma ordem de anisotropia. Para tal, considera-se que o comprimento da placa, L, e do raio do cilindro, R, são grandes quando comparados ao livre caminho médio (*lcm*) do nêutron no meio e, portanto, os resultados dos problemas são equivalentes. Para obter os resultados da Tabela 1, considera-se que o comprimento da placa e o raio do cilindro são iguais a L = R = 100000 *lcm* e a condição de contorno é dada pela aproximação (14).

Caso1 (C1): considere um problema de transporte de nêutrons com fluxo incidente $F = 1/4\pi$, fonte externa $Q(r) = 0$ e as seções de choque dadas por $c = 0{,}99$ e $cf_1 = 0{,}80$.

Caso2 (C2): no segundo problema, considere a equação de transporte de nêutrons com fluxo incidente $F = 0$, fonte externa $Q(r) = 1$ e as seções de choque dadas por $c = 0{,}80$ e $cf_1 = 0{,}70$.

Tabela 1: Fluxo Escalar para os problemas em Geometria Cartesiana e Cilíndrica

Posição (x ou R)	Fluxo escalar C1- cartesiana	Fluxo escalar C1- cilíndrica	Fluxo escalar C2- cartesiana	Fluxo escalar C2- cilíndrica
99990	4.5269	4.5450	4.9569	4.9550
99991	4.8900	4.9095	4.9362	4.9333
99992	5.2822	5.3033	4.9055	4.9013
99993	5.7059	5.7286	4.8600	4.8538
99994	6.1636	6.1881	4.7926	4.7834
99995	6.6581	6.6846	4.6928	4.6791
99996	7.1926	7.2212	4.5444	4.5243
99997	7.7714	7.8022	4.3232	4.2937
99998	8.4025	8.4352	3.9892	3.9466
99990	9.1150	9.1477	3.4591	3.4024
100000	10.3420	10.3510	2.1224	2.1259

4. CONCLUSÕES

A ideia central deste trabalho é a construção do termo de anisotropia linear na equação de transporte de Mitsis. Para isto, parte-se da hipótese de que os autovalores que compõem a solução desse problema são idênticos aos determinados por Case para o caso em geometria cilíndrica. Isto significa que para um meio homogêneo, o conjunto de autovalores independe da geometria considerada. Isto pode ser depreendido da Tabela 1 onde os resultados em geometria cilíndrica apresentam boa concordância com os do problema em geometria cartesiana. Deve ficar claro que a condição de contorno proposta em (14) é uma aproximação feita a partir da condição de Marshak para o problema difusivo. A proposta apresentada neste trabalho pode ser estendida para outros tipos de geometria.

5. AGRADECIMENTO

O primeiro autor agradece à FAPERGS pelo apoio financeiro para o desenvolvimento das atividades científicas.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELL, G. I. , GLASSTONE S. **Nuclear Reactor Theory.** Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

CASE, K. M. **Linear Transport Theory**. Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1967.

GONÇALVES, G. A. **Solução analítica da equação do transporte de partículas neutra em geometria cartesiana e cilíndrica**. 2003. 101f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia UFRGS.

GONÇALVES, G. A., VILHENA, M.T., BODMANN, B. E. J. Heuristic Geometric "Eigenvalue Universality" in a One-Dimensional Neutron Transport Problem with Anisotropic Scattering. **Kernthechnik**. v.75, n.1-2, p. 50-52, 2010.

MITSIS, G. J. **Tranport Solutions to the Monoenergetic Critical Problems**. 1963. 172f. Tese (Thesis in Applied Mathematics) - Argone National Laboratory Chicago.

SIEWERT, C. E., THOMAS, J. R. Neutron Transport Calculations in Cylindrical Geometry. **Nuclear Science and Engineering**. v. 87, p.107-112, 1984.