HOMOGENEIZAÇÃO DE UM PROBLEMA DE DIFUSÃO ESTACIONÁRIA LINEAR SOBRE UM MEIO HETEROGÊNEO

RODRIGO ZANETTE[1]; JULIÁN BRAVO CASTILLERO[2];
LESLIE D. P. FERNÁNDEZ[3];

[1]*Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat), Instituto de Física e Matemática (IFM), Universidade Federal de Pelotas (UFPel) Pelotas – rodrigozanette@hotmail.com;*
[2]*Pesquisador Visitante Especial no PPGMMAT (CAPES nº 88881.030424/2013-01), Universidade de Havana, Cuba – jbravo@matcom.uh.cu;*
[3]*Professor do Departamento de Matemática e Estatística, IFM, UFPel - leslie.fernandez@ufpel.edu.br;*

1. INTRODUÇÃO

O meio que nos cerca é composto por materiais naturais e artificiais, ou seja, criados pelo homem, que na sua maioria são materiais heterogêneos. Na modelagem matemática dos fenômenos físicos que ocorrem nestes materiais deparamos com o fato de que soluções diretas, seja por métodos analíticos ou numéricos, senão impossíveis, são muito complicadas de se obter. Deste modo se faz importante buscarmos métodos que consigam resolver este impasse. Um método que vem sendo estudado é o método de homogeneização assintótica (Bakhvalov & Panasenko, 1989), que consiste em procurar a solução na forma de uma série assintótica e, a qual produz o desacoplamento do problema original em uma sequência de problemas para os coeficientes das potências de ε e na série assintótica.

Sejam $K(\xi)$ uma função de classe $C^{\infty}(\mathbb{R})$ e 1-periódica satisfazendo a desigualdade $0 < k_1 \le K(\xi) \le k_2$, e $f(x)$ uma função de classe $C^{\infty}[0,1]$. Construímos uma solução assintótica formal (s.a.f.) do problema

$$\frac{d}{dx}\left(K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du^{\varepsilon}}{dx}\right) = f(x),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u^{\varepsilon}(0) = g_1,\ \ u^{\varepsilon}(1) = g_2, \tag{2}$$

onde x é a variável lenta, $\xi = x/\varepsilon$ é a variável rápida e ε é um pequeno parâmetro. Problema (1) e (2) descreve um campo de temperatura estacionário numa haste heterogênea, com um coeficiente de condutividade que oscila rapidamente $K(x/\varepsilon)$ na presença de fontes de acordo com a lei $f(x)$.

2. METODOLOGIA

Procura-se a solução na forma de uma expansão assintótica (e.a.) dada por

$$u^{(\infty)}(x,\xi) = u_0(x,\xi) + \varepsilon u_1(x,\xi) + \varepsilon^2 u_2(x,\xi) + \ldots, \qquad \xi = x/\varepsilon$$

onde $u_i(x,\xi)$ são funções 1-periódicas em ξ, ou seja, $u_i(x,\xi+1) = u_i(x,\xi)$.

De substituir $u^{(\infty)}(x,\xi)$ em (1) levando em conta a regra da cadeia $\left(\frac{d}{dx}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi}\right)$, agrupando-se os termos ε de mesma potência temos

$$0 = \varepsilon^{-2}L_{\xi\xi}u_0 + \varepsilon^{-1}(L_{x\xi}u_0 + L_{\xi x}u_0 + L_{\xi\xi}u_1) + \varepsilon^{0}(L_{xx}u_0 + L_{x\xi}u_1 + L_{\xi x}u_1 + L_{\xi\xi}u_2 - f(x)) + \ldots$$

onde utilizamos o operador $L_{\alpha\beta}(\cdot)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(K(\xi)\frac{\partial(\cdot)}{\partial\beta}\right)$.

Para a igualdade se satisfeita cada coeficiente das potências de ε devem se anular, obtendo-se assim uma sequência de equações:

$\varepsilon^{-2}: L_{\xi\xi}u_0=0$

$\varepsilon^{-1}: L_{\xi\xi}u_1=-L_{x\xi}u_0-L_{\xi x}u_0$

$\varepsilon^{0}: L_{\xi\xi}u_2=-L_{xx}u_0-L_{x\xi}u_1-L_{\xi x}u_1+f(x)$

$\varepsilon^{1}: \ldots$

Escrevendo-se a equação ε^{-2} na sua forma expandida tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial\xi}\right)=0$$

integrando em relação a ξ, lembrando que $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, e sabendo que $K(\xi)>0$, obtemos

$$K(\xi)\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial\xi}=C(x)\Rightarrow\frac{\partial u_0(x,\xi)}{\partial\xi}=\frac{C(x)}{K(\xi)}$$

O seguinte Lema (Bakhvalov & Panasenko, 1989) fornece condições para a existência de soluções 1-periódicas de equações com estrutura como as da sequência acima.

LEMA: Seja $F(\xi), K(\xi)$ funções diferenciáveis 1-periodicas, com $K(\xi)$ positivo e limitado. Uma condição necessária e suficiente para um solução 1-periódica da equação $L_{\xi\xi}N=F$ existir é que $\langle F(\xi)\rangle\equiv\int_0^1 F(\xi)d\xi=0$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

De aplicar o Lema à equação de ε^{-2} segue que existe solução $u_0(x,\xi)$ 1-periódica em ξ, de onde demonstra-se que não depende de ξ, $u_0(x,\xi)=v(x)$. Isto faz com que a equação de ε^{-1} se transforme em $L_{\xi\xi}u_1=-L_{\xi x}u_0$. De aplicar o Lema esta equação segue que a solução 1-periódica é $u_1(x,\xi)=N_1(\xi)v'(x)$ onde $N_1=\int_0^{\xi}\left(\hat{K}/K(\eta)-1\right)d\eta$ e $\hat{K}=\left\langle K^{-1}(\xi)\right\rangle^{-1}$ é o coeficiente efetivo. Isso nos leva a supor que podemos tentar buscar uma e.a. da solução na forma de

$$u^{(\infty)}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i}N_i(\xi)v^{(i)}(x),\quad \xi=x/\varepsilon \tag{3}$$

onde $N_i(\xi)$é uma função 1-periodica e v(x) é uma solução de algum problema com coeficientes constantes, que serão construídos abaixo e v(x) tendo uma e.a.

$$v(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j}v_j(x) \tag{4}$$

onde $v_j(x)$ não depende de ε.

Substituindo a serie (3) no lado esquerdo de (1) e usando a regra da cadeia duas vezes encontramos

$$\varepsilon^{-2}(K(\xi)N_0'(\xi))'v(x)+\varepsilon^{-1}\left[(K(\xi)N_1'(\xi))'+K(\xi)N_0'(\xi)+(K(\xi)N_0(\xi))'\right]v'(x)+ \\ +\sum_{i=2}^{\infty}\varepsilon^{i-2}\left[(K(\xi)N_i'(\xi))'+K(\xi)N_{i-1}'(\xi)+(K(\xi)N_{i-1}(\xi))'+K(\xi)N_{i-2}(\xi)\right]v^{(i)}(x)\sim f \qquad (5)$$

Vamos construir $v_0(x)$ e $N_i(\xi)$ para que os termos de ordem ε^{-2} e ε^{-1} desapareçam e que todos os outros termos sejam independentes do ξ. Obtemos uma cadeia de relações

$$L_{\xi\xi}N_0(\xi)=0 \qquad (6)$$

$$L_{\xi\xi}N_1(\xi)=-K(\xi)N_0'(\xi)-(K(\xi)N_0(\xi))' \qquad (7)$$

$$L_{\xi\xi}N_i(\xi)=-K(\xi)N_{i-1}'(\xi)-(K(\xi)N_{i-1}(\xi))'-K(\xi)N_{i-2}(\xi)+h_i, \quad i>1. \qquad (8)$$

onde h_i é uma constante. Assumindo $N_0 = 1$, (6) é satisfeita identicamente, e (7) se torna a equação do problema local

$$L_{\xi\xi}N_1(\xi)=-K'(\xi). \qquad (9)$$

Substituindo (3) nas condições (2) levando em conta a 1-periodicidade de $N_i(\xi)$ temos

$$v(0)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i}N_i(0)v^{(i)}(0)\sim g_1,\ v(l)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^{i}N_i(0)v^{(i)}(1)\sim g_2, \qquad (10)$$

Impondo a condição $N_i(0)=0$ para $i\geq 1$, as relações (2) tornam-se

$$v(0)\sim g_1, \qquad v(l)\sim g_2. \qquad (11)$$

Perceba que (8) e (9) podem ser rescritas da forma $L_{\xi\xi}N_i = T_i(\xi)+h_i,\ i\geq 1,$ onde $h_1=0,\ \ T_1(\xi)=-K'(\xi)$, e $T_i(\xi)=-K(\xi)\left(\frac{dN_{i-1}}{d\xi}+N_{i-2}\right)-\frac{d}{d\xi}(K(\xi)N_{i-1}), i>1$.

Logo, de aplicar o Lema temos $h_i = -\langle T_i(\xi)\rangle$. Em particular, $h_2 = \widehat{K}$.

Desde que $N_i(\xi)$ satisfaça (6)-(8), a serie (5) assume a forma

$$\sum_{i=2}^{\infty}\varepsilon^{i-2}h_i v^{(i)}(x)\sim f(x), \qquad (12)$$

$$v(0)\sim g_1, \quad v(l)\sim g_2, \qquad (13)$$

então $u^{(\infty)}$ de (3) é a s.a.f. do problema inicial (1), (2).

Substituindo a s.a.f. (4) em (12) - (13), temos

$$\sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^{q}\left(h_2 v''(x)+\sum_{j=0}^{q-1}h_{q-j+2}v_j^{(q-j+2)}(x)\right)\sim f(x),\quad \sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^{q}v_q(0)\sim g_1,\quad \sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^{q}v_q(l)\sim g_2.$$

Daqui resulta que o $v_q(x)$ deve satisfazer

$$h_2\frac{d^2v_q}{dx^2}=f_q(x),\quad q\geq 0,\ \ v_q(0)=g^q{}_1,\ \ v_q(l)=g^q{}_2,\ \ q\geq 0, \qquad (14)$$

onde

$$f_q(x)=\begin{cases} f(x) & ,\ q=0 \\ -\sum_{j=0}^{q-1}h_{q-j+2}\,v_j^{(q-j+2)}(x), & q>0 \end{cases},\quad g_i^q=g_i\delta_q^0=\begin{cases} g_i, q=0 \\ 0, q>0. \end{cases}$$

Deste modo, todos os v_q podem ser encontrados recorrentemente dos problemas de valor de contorno (14). Além disso, pode ser provado por indução que o $f_q(x)$ são infinitamente diferenciável e por isso $v_q(x)$ também é. Dos problemas (14) e $h_2 = \widehat{K}$ para $q=0$ temos

$$\widehat{K}\, v_0''(x) = f(x), \quad v_0(0) = g_1, \quad v_0(1) = g_2 \qquad (15)$$

e é chamado de problema de ordem zero vingada. Ele descreve um campo térmico em um meio homogêneo cujas propriedades são as propriedades efetivas do meio heterogêneo original. A solução da cadeia de problemas (14), para todos $q \geq 0$ conclui o processo de construção das s.a.f. do problema (1), (2).

4. CONCLUSÕES

Analisando as dificuldades que se encontram ao resolver problemas em meios heterogêneos, o método de homogeneização assintótica mostra-se relevante, pois permite aproximar com precisão a solução do problema original.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

LIMA, M. P. ; LAZZARI, L. ; FERNANDEZ, L. S. ; FERNANDEZ, L. D. P. ; CASTILLERO, J. B. . **Homogeneização assintótica da equação da onda sobre meios microperiódicos unidimencionais.** In: Anais do XX EREMATSUL - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, 2014, Bagé-RS.

SAMPAIO, M. S. M.; ROCHA, G. L. **Aplicação do Método de Homogeneização Assintótica a um problema de valor de contorno com coeficientes periódicos rapidamente oscilantes.** Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 12, n. 55, p. 1-16, 2010.