

ASSIMILAÇÃO DE DADOS PELO *ENSEMBLE KALMAN FILTER* EM DINÂMICA CAÓTICA

LARRI SILVEIRA PEREIRA; FABRICIO PEREIRA HARTER; REGIS SPEROTTO DE QUADROS

¹Universidade Federal de Pelotas – larri.1992@hotmail.com; fpharter@gmail.com; regisquadros@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

Procurando por soluções periódicas do modelo de Saltzman (1962), Lorenz (1963) considerou uma decomposição espectral de Fourier levando em consideração apenas os termos de baixa ordem do modelo. Assim, obteve um sistema acoplado não-linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, na forma

$$\frac{dX}{d\tau} = -\sigma(X - Y) \quad (1)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = rX - Y - XZ \quad (2)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ \quad (3)$$

onde $\tau \equiv \pi^2 H^{-2} (1 + a^2) \kappa t$ é o tempo adimensional, sendo H , α , κ e t respectivamente a altura da cama, a condutividade térmica, o número de onda e o tempo; $\sigma \equiv \kappa^{-1} \nu$ é o número de Prandtl (ν é a viscosidade cinemática); $b \equiv 4(1 + a^2)^{-1}$. O parâmetro $r = R/R_c \propto \Delta T$ é o número de Rayleigh (T é a temperatura), e R_c é o número de Rayleigh crítico.

O *Kalman Filter* (KF) é o melhor estimador para problemas lineares e cujo os erros seguem função de distribuição Gaussiana. O método derivado do KF aplicado a problemas não-lineares é chamado de *Extended Kalman Filter* (EKF), dado por duas fases, como segue:

1) Passo da previsão:

$$w_{n+1}^f = F_n w_n^f + \mu_n \quad (4)$$

$$P_{n+1}^f = F_n P_n^a F_n^T + Q \quad (5)$$

2) Passo de análise

$$w_{n+1}^a = w_{n+1}^f + K_{n+1} [y_{n+1}^0 - H(w_{n+1}^f)] \quad (6)$$

$$K_{n+1} = P_{n+1}^f H_{n+1}^T [R_{n+1} + H_{n+1} P_{n+1}^f H_{n+1}^T]^{-1} \quad (7)$$

$$P_{n+1}^a = [I - K_{n+1} H_{n+1}] P_{n+1}^f \quad (8)$$

onde F_n é o modelo matemático utilizado, μ_n é o erro de modelagem, os subscritos n denotam o passo de tempo discreto, e os sobreescritos f representam os valores preditos. A inovação é fornecida por $[y_{n+1}^0 - H(w_{n+1}^f) + \nu_n]$, onde a matriz H representa o sistema de observação e ν_n é o ruído associado a observação. Neste trabalho são adotados as hipóteses típicas de gaussianidade, média zero e

ortogonalidade para os ruídos. O vetor de estado é definido como $w_{n+1} = [X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}]^T$ e estimado através da recursão $w_{n+1}^a = w_{n+1}^f + K_{n+1} [y_{n+1}^0 - H(w_{n+1}^f)]$, onde w_{n+1}^a é a análise, K_n é o ganho de Kalman, na qual é calculado a partir da minimização da estimativa da variância do erro $J_{n+1} = E \{ (w_{n+1}^a - w_{n+1}^f)^T (w_{n+1}^a - w_{n+1}^f) \}$, sendo $E\{\cdot\}$ o valor esperado, Q_n e R_n são a covariância de μ_n e ν_n , respectivamente. A assimilação de dados é feita através da amostragem $R_{n+1} \equiv z_{n+1} - z_{n+1}^f = z_{n+1} - H_n w_{n+1}^f$.

Segundo Kalnay (2004), mesmo que o sistema comece com uma fraca suposição inicial do estado da atmosfera, o EKF pode passar por um período transitório inicial de uma semana ou mais, após a qual devem fornecer a melhor estimativa imparcial do estado da atmosfera e sua covariância de erro. No entanto, de acordo com Miller et al. (1994), se o sistema é muito instável e as observações não são suficientemente frequentes, é possível que a linearização se torne inexata e o EKF pode afastar-se da solução verdadeira.

Neste trabalho é proposto o *Ensemble Kalman Filter* (EnKF), que consiste em substituir a covariância dos erros de previsão (equação 5) pela expressão

$$P^f \approx \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (X_k^f - \bar{X}^f) (X_k^f - \bar{X}^f)^T$$

em que o conjunto tem K ciclos de assimilação de dados.

2. METODOLOGIA

No presente trabalho as equações de Lorenz são resolvidas pelo método das diferenças finitas com um incremento de tempo adimensional de 0,01 e considerando 500 passos de tempo como tempo total de integração. Utiliza-se os seguintes valores iniciais e constantes para o sistema de Lorenz: $X_0 = 1,00, Y_0 = 3,00, Z_0 = 5,00, \sigma = 10, b = 8/3$, na qual, optando-se pelo regime caótico usa-se $r = 32$. (Lorenz, 1963).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir apresenta-se dois experimentos para testar o esquema de assimilação proposto. No primeiro, Figuras 1(a)-(b)-(c)-(d) avalia-se o sistema de assimilação por EnKF com 10 e 100 membros ao se assimilar dados com 20% e 40% de ruído.

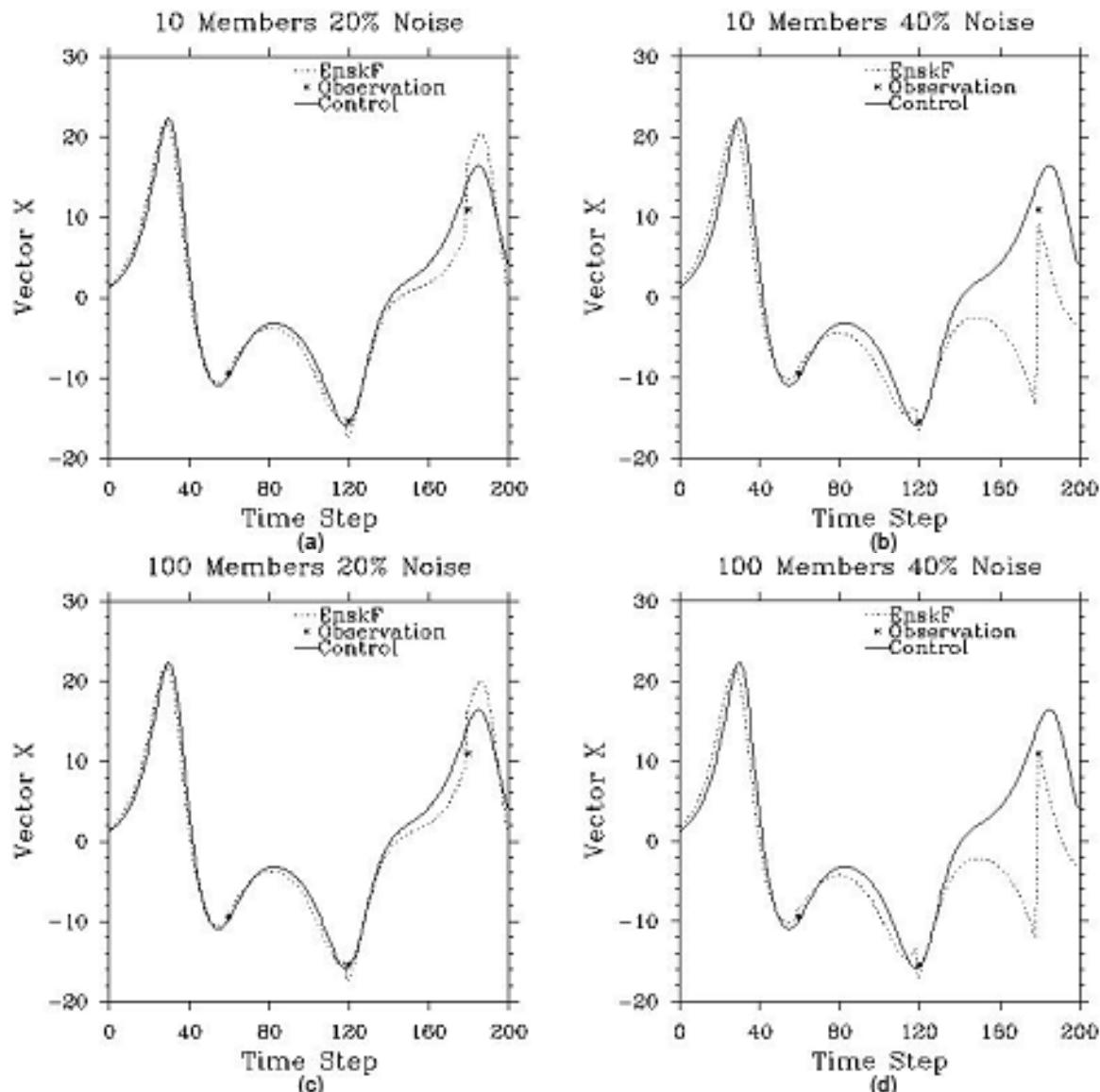


Figura 1: EnKF assimilado nas mesmas evoluções de trajetórias do Experimento 1, mas com estimativas iniciais bastante fracas, ou seja, 20% e 40%

O resultados mostra que o sistema de assimilação é eficiente quando aplicado a dados com 20% de ruído tanto para o EnKF com 10 quanto para o EnKF com 100 membros. No entanto, o sistema falha ao se assimilar dados com 40% de ruído.

No Experimento 2, apresentado na Figura 2(a)-(b), analisa-se uma assimilação mais realista, onde há observação apenas no 180º passo de tempo, nas três variáveis do modelo (Figura 2(a)) e apenas na variável Z do modelo, ou seja, o número de graus de liberdade do modelo é três vezes maior do que o número de graus de liberdade da observação.

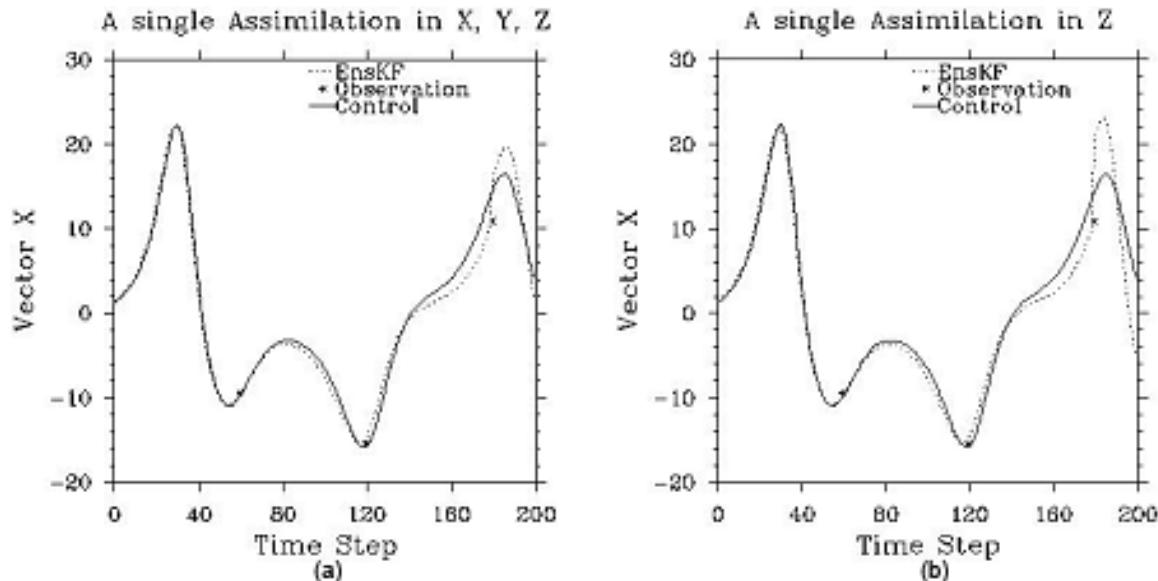


Figura 2: EnKF assimilando apenas uma observação no 180° passo de tempo em nas três variáveis dependentes de Lorenz (4a) e apenas na variável X (4b).

A Figura 2 mostra a limitação da técnica para *underdetermined systems*.

4. CONCLUSÕES

A partir dos experimentos propostos, os autores concluíram que o EnKF é efetivo na solução de problemas de assimilação de dados em dinâmica caótica. Entretanto, o sistema é sensível a qualidade dos dados. Verificou-se, que o EnKF funciona na assimilação de dados com 20% de ruído, mas falha ao assimilar dados com 40% de ruído. Experimentos também mostraram, que em regiões remotas, tais como oceanos e florestas tropicais, o processo de assimilação pode falhar, pois nestas regiões os graus de liberdade do modelo são, geralmente, muito maiores do que o número de observações disponíveis para assimilação. Nestes casos, a assimilação de dados de satélite ganha importância.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LORENZ, E. Deterministic nonperiodic flow, **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130-141, 1963.

SALTZMAN, B. Finite amplitude free convection as an initial value problem, **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 19, p. 329-341, 1962.

KALNAY, E. **Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability**, Cambridge, Cambridge University Press, 2003.

MILLER, R., GUIL, M., GAUTHIEZ, F. Advanced Data Assimilation in strongly nonlinear dynamical systems, **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 51, p. 1037-1056, 1994.