DESIGUALDADE DE KRAFT E APLICAÇÕES

TAVANA IVEN HARTWIG [1];
CARLOS ANTÔNIO PEREIRA CAMPANI [2]

[1]*Universidade Federal de Pelotas – tavanah@live.com*
[3]*Universidade Federal de Pelotas – carlos.a.p.campani@gmail.com*

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a Desigualdade de Kraft, cujas aplicações ocorrem na área de Teoria da Informação. Teoria da Informação estuda a informação que é transferida por um canal que conecta um transmissor e um receptor. Uma versão da Teoria da Informação, chamada de Teoria da Informação Algorítmica ou Complexidade de Kolmogorov, foi desenvolvida para definir formalmente o conceito de aleatoriedade. A Complexidade de Kolmogorov é definida usando-se a Máquina de Turing. As aplicações desta teoria são inúmeras, particularmente em probabilidade e estatística, provendo um fundamento saudável para as aplicações de estatística.

Neste trabalho focaremos a Desigualdade de Kraft, sua prova formal e suas aplicações em Teoria da Informação na definição dos tamanhos de códigos instantaneamente decodificáveis, na definição da complexidade K(x) como uma medida de probabilidade e na definição do Número Ômega de Gregory Chaitin.

O artigo pretende mostrar que a Desigualdade de Kraft é uma medida de probabilidade, por meio da prova de convergência da série infinita que a define. A prova de que a complexidade K(x) é uma medida de probabilidade sobre o conjunto das strings binárias, uma consequência da Desigualdade de Kraft, é um resultado importante da área que abre muitas possibilidades de aplicações a serem desenvolvidas no futuro.

1.1. Codificações livre de prefixo

Definição: Sejam x^1 e x^2 strings binárias finitas e utilizando a operação de concatenação de strings binárias. Definimos que $x = x^1.x^2$ Então, x^1 é chamado de prefixo de *x*. Vejamos:

$$x^1 = 01 \quad e \quad x^2 = 10$$
$$x = x^1 . x^2 = 0110\, , logo \;\; x^1 \, é \, prefixo \; de \; x$$

Agora que já definimos o que é prefixo:

Um conjunto α ⊆ {0,1} + é livre de prefixo se nenhum elemento de α é prefixo de outro elemento do mesmo.

Temos então uma codificação binária E: {0,1} + → {0,1} + é um mapeamento do conjunto de todos os strings que tem seu tamanho maior que zero. Chamamos este conjunto gerado pela codificação de E, de codificação livre de prefixo, se E é livre de prefixo.

1.2. Desigualdade de Kraft

Teorema 1.

Toda codificação livre de prefixo E satisfaz a desigualdade $\sum_{x \in \alpha} 2^{-|x|} \le 1$ de x é o conjunto dos códigos gerados por E, e |x| o tamanho de x.

Para isto:

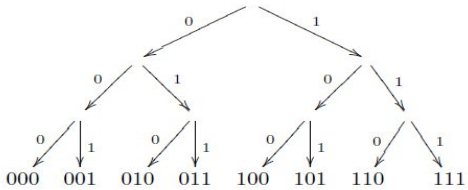

Figura 1. Árvore da codificação binária

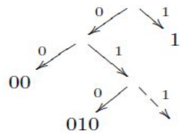

Figura 2. Árvore mostrando códigos livres de prefixo

Devemos caminhar pelos "ramos da arvore", uma vez que chegamos ao ponto de bifurcação devemos tomar umas das seguintes ações:

- Tendo chegado à ponta do ramo e obtendo uma string é prefixo de outra, devemos ignora - lá e não seguir neste ramo.

- Casos contrários obtêm uma nova string e seguem desenvolvendo por este ramo.

Após caminhar n passos na arvore nós podemos ter terminado em algum nível $\mathrm{m} < n$.

Sabemos que ao percorrer estes caminhos temos que ao abrir cada possibilidade, a probabilidade que temos em cada ramo é de $\frac{1}{2}$, portanto temos:

$$\sum_{Códigos\ com\ |x|<n} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + \sum_{caminhos\ ainda\ não\ terminados} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 1$$

Como

$$\sum_{caminhos\ ainda\ não\ terminados} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \geq 0$$

Podemos interpretar estes somatórios como:

A + B = 1

B ≥ 0 , logo $\mathrm{A} \leq 1$

$$\sum_{Códigos\ para\ |x|<n} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \leq 1$$

Sendo assim

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{Códigos\ com\ |x|<n} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = \sum_{x \in \alpha} \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = \sum_{x \in \alpha} 2^{-|x|}$$

Ressaltando que prova da desigualdade de Kraft é uma prova de convergência de série, exemplificando temos que lançando uma moeda uma vez, e levando em conta a equação acima temos uma probabilidade de $\frac{1}{2}$. Já ao lançarmos a mesma duas vezes temos as seguintes possibilidades, 00; 01; 10; 11

Vejamos $2^{-|00|} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Temos que a desigualdade de Kraft converge:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 1$$

1.3. Complexidade de Kolmogorov

A complexidade de Kolmogorov foi proposta por Andrei N. Kolmogorov, e pode ser compreendida como uma medida do grau de compressão de dados ao qual uma string binária pode ser submetida. Como representação comprimida de um objeto usamos a menor descrição (programa) para uma Máquina de Turing Universal de prefixo que computa a string original. Uma Máquina de Turing de Prefixo é uma máquina que só aceita descrições de um conjunto de programas codificados usando uma codificação livre de prefixo. A Complexidade Kolmogorov de uma string binária é o tamanho desta menor descrição. Representamos a complexidade de Kolmogorov da string x como K(x). A definição de K(x) foi um grande passo em direção a uma definição formal de sequência aleatória consistente (MING; VITÁNYI, 2008).

1.4. K(x) como medida de probabilidade

A prova de que a complexidade K(x) é uma medida de probabilidade sobre o conjunto das strings binárias, uma consequência da Desigualdade de Kraft, é um resultado importante da área que abre muitas possibilidades de aplicações.

Teorema 2.

$$\sum_{x \in \{0,1\}^+} 2^{-K(x)} \leq 1$$

Sendo este um caso trivial da desigualdade de Kraft, vemos que $x \in \{0,1\}^+$, é livre de prefixo. Temos que $2^{-\mathrm{k(x)}}$ é uma medida de probabilidade.

1.5. O Número Ômega de Chaitin.

O Número Ômega de Chaitin representa a probabilidade de que um programa para a Máquina de Turing pare,ou seja, em um determinado ponto o programa sempre retorna ao seu ponto de partida. A Desigualdade de Kraft garante a convergência da série que define este Número. Se este número fosse computável, isso levaria ao absurdo de poder determinar se um programa qualquer pára ou não. Assim, concluímos que o Número Ômega é incomputável. Nesta fórmula, p representa um programa que pára (finaliza) e $|p|$ é o tamanho deste programa. É interessante observar que $0 \leq \Omega \leq 1$, representando Ω a probabilidade de um programa qualquer parar (finalizar). Ω é um número real aleatório (cujos dígitos formam uma seqüência aleatória) e não computável (ou seja, não pode ser computado por um programa na máquina de Turing.

$$\Omega = \sum_{p\ para} 2^{-|p|}$$

2. METODOLOGIA

O trabalho foi realizado preocupando-se em trazer um estudo sobre a Desigualdade de Kraft, cujas aplicações ocorrem na área de Teoria da Informação. A partir de outros estudos principalmente (CAMPANI; MENEZES, 2001) e ainda (MING; VITÁNYI, 2008), chegamos a esses resultados.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este estudo sobre a Desigualdade de Kraft, e a Complexidade de Kolmogorov cujas aplicações são em probabilidade e estatística, trousse sua prova formal e suas aplicações em Teoria da Informação na definição dos tamanhos de códigos instantaneamente decodificavam, na definição da complexidade K(x) como uma medida de probabilidade e na definição do Número Ômega de Gregory Chaitin.

Mostramos que a Desigualdade de Kraft é uma medida de probabilidade, e que a complexidade K(x) é uma medida de probabilidade sobre o conjunto das strings binárias, uma consequência da Desigualdade de Kraft, o que é um importante resultado da área que abre muitas possibilidades de aplicações.

4. CONCLUSÕES

Embora se trate de estudo de resultados já obtido com um interesse nas aplicações, a partir deste podemos concluir que tivemos resultados importantes sobre a Desigualdade de Kraft, que abre muitas possibilidades de aplicações.

As aplicações desta teoria são inúmeras, vale ressaltar as em probabilidade e estatística. Como vimos a prova da desigualdade de Kraft é uma prova de convergência de série infinita.

Além da prova de que a complexidade K(x) é uma medida de probabilidade, uma consequência da Desigualdade de Kraft, é um resultado importante desta área que abre muitas possibilidades de aplicações que podemos vir a tratar futuramente.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CAMPANI, C. MENEZES, P. Teorias da aleatoriedade. In: **Revista de informática teórica e aplicada**, UFRGS, Porto Alegre, v.11, n.2, 2004, p.75-98.
[2] MING, L.; VITANYU.P. M. B**. An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications.** New York:Springer-Verlag,2008.

Este artigo é apoiado pelo projeto de apoio ao aprendizado em matemática e estatística (IFM/UFPel) e pelo projeto Ômega-pi (IFM/UFPel).