CÁLCULO DOS COEFICIENTES EFETIVOS DE UM COMPÓSITO FIBROSO VIA MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA.

JONATAS VOESE[1]; LESLIE FERNÁNDEZ[2]; JULIÁN CASTILLERO[3]

[1]Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat), Instituto de Física e Matemática (IFM), Universidade Federal de Pelotas (UFPel) Pelotas – jonatasvoese@gmail.com;
[2]Pesquisador Visitante Especial no PPGMMAT (CAPES nº 88881.030424/2013-01), Universidade de Havana, Cuba –jbravo@matcom.uh.cu;
[3]Professor do Departamento de Matemática e Estatística, IFM, UFPel - leslie.fernandez@ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A necessidade de construção de estruturas seguras e mais resistentes deu origem à busca por materiais que apresentem melhores propriedades físicas (resistividade, condutividade, etc.). No entanto, os materiais encontrados na natureza não possuem estas propriedades em grandeza suficiente que justifique seu uso, tornando, desta forma, mais difícil encontrar matéria-prima que supra as necessidades industriais vigentes.

Como resposta a esta problemática, surge a produção e o consequente estudo de materiais compostos ou compósitos, isto é, constituídos por dois ou mais materiais diferentes. A combinação resultante do processo de composição apresenta propriedades que nenhum dos componentes apresenta em estado natural, por este motivo têm-se desenvolvido métodos para a determinação das propriedades efetivas dos compósitos. O conceito de propriedades efetivas permite tratar um meio constituído por matriz e heterogeneidades, tais como vazios, como um meio contínuo e homogêneo (SILVA, 2009).

Além disso, muitos materiais compostos apresentam estrutura periódica, isto significa que o meio é composto de elementos recorrentes (células) (BAKHVALOV & PANASENKO, 1989). Tais células periódicas contêm todas as propriedades em estudo do compósito e, portanto, os métodos para a obtenção das propriedades efetivas baseiam sua aplicação nas células periódicas.

Meios heterogêneos providos de estrutura periódica são modelados matematicamente por sistemas de equações diferenciais com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes (SILVA, 2009). Tal característica do sistema torna-o trabalhoso de ser resolvido utilizando os métodos numéricos usuais.

Um dos métodos, largamente utilizados, que permitem contornar o caráter rapidamente oscilante dos coeficientes do problema e encontrar as propriedades efetivas do compósito é o Método de Homogeneização Assintótica (MHA), descrito em (BAKHVALOV & PANASENKO, 1989). Este método se baseia na solução de problemas locais que são posteriormente utilizados para encontrar os coeficientes efetivos do problema homogeneizado.

Neste trabalho consideramos um compósito fibroso cujo interior das fibras é vazio. Além disso, suporemos que a seção transversal das fibras seja circular. Fazendo considerações a respeito da matriz e suas propriedades (isotropia e homogeneidade) e aplicando condições de contorno adequadas resolvemos o problema homogeneizado em termos de funções analíticas e consequentemente encontramos os coeficientes efetivos do compósito.

Destaca-se aqui que o principal objetivo deste trabalho é evidenciar e demonstrar a aplicação do MHA para o cálculo das propriedades do compósito com as condições dadas. Resultado numéricos serão deixados para trabalhos posteriores.

2. METODOLOGIA

Considere a célula básica (Y) para um compósito com estrutura periódica e sua respectiva representação no modelo homogeneizado:

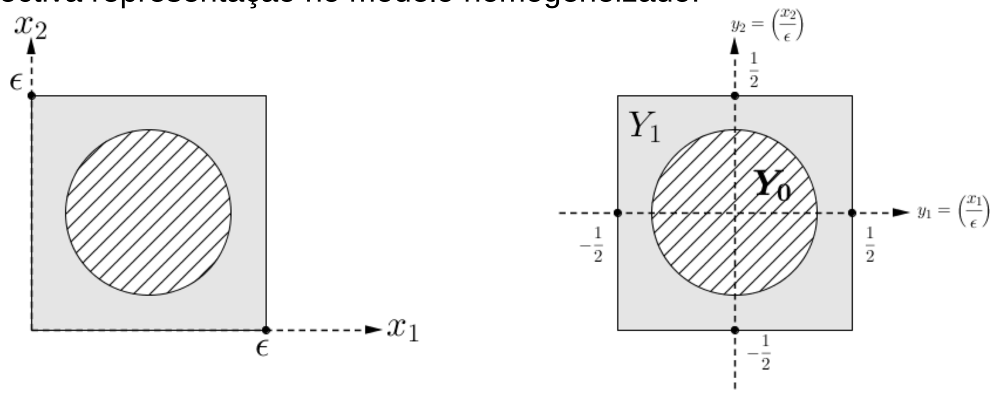

Figura 1: Exemplo de célula básica: Problema original (esquerda), problema homogeneizado (direita)

Onde Y_1 é a região ocupada pela matriz, Y_0 é a região ocupada pela fibra (neste caso, vazia) e ∂Y_0 o contorno da região da fibra (neste caso, a circunferência de raio r).

Como o meio é condutivo e periódico, aplicando o Método de Homogeneização Assintótica, os coeficientes efetivos $\hat{a}_{jp}$ são calculados como:

$$\hat{a}_{jp} = \left\langle a_{jp} + a_{jl} \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \right\rangle \qquad (1)$$

Neste caso, a_{jp} são os coeficientes (simétricos e definidos positivos) do meio original e o operador $\langle . \rangle$ é definido por:

$$\langle . \rangle = \frac{1}{|Y|} \iint_Y (.) \; dy_1 dy_2 \qquad (2)$$

sendo $|Y|$ a área de Y. E N_p que aparece é solução com período Y da equação

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jp} + a_{jl} \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \right) = 0, \quad \forall l, p = (1,2,3) \qquad (3)$$

Considere o vetor normal a ∂Y_0 como sendo $n = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, e as coordenadas espaciais escritas em termos das coordenadas polares r e θ

$$(y_1 = r\cos\theta, y_2 = r sin\theta)$$

Suponhamos que a_{jp} seja isotrópica e homogênea, ou seja, $a_{jp} = k\delta_{jp}$ e $k \in \mathbb{R}_+^*$ representa a condutividade do meio sendo δ_{kl} é o delta de Kronecker. Sob tais hipóteses, a equação (3) transformasse em:

$$\Delta N_p = 0, \quad y \in Y_1 \qquad (4)$$

Agora, lembrando que a região ocupada pela fibra é vazia, logo é possível usarmos uma condição de fronteira livre na borda de Y_0, isto é:

$$\left(a_{jp} + a_{jl} \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \right) n_j = 0, \quad y \in \partial Y_0$$

a qual no caso homogêneo e isotrópico torna-se:

$$\frac{\partial N_p}{\partial y_j} n_j = -n_p \tag{5}$$

onde n_i são as componentes do vetor normal n.Para garantir a unicidade, vamos supor que a média de N_p seja nula:

$$\langle N_p \rangle = 0 \tag{6}$$

Por fim, para manter o caráter periódico N_p deve assumir os mesmos valores em lados opostos de Y. Logo, devemos encontrar N_p que satisfaça as equações de (4), as condições (5) e (6), e que seja Y - periódica.

Note que fazendo $p=3$ em (4)-(6), segue que $N_3=0$ e daí, e pela propriedade de simetria da matriz, segue que $\hat{a}_{13}=\hat{a}_{31}=\hat{a}_{23}=\hat{a}_{32}=0$ e $\hat{a}_{33}=\langle k \rangle$. Usando a definição (2), tem-se que $\hat{a}_{33}=\langle k \rangle = k(1-\pi r^2)$. Com isso, devemos nos preocupar apenas com N_2 e N_3. Para nos auxiliar consideremos a função complexa theta de Weierstrass:

$$\xi(z) = \frac{1}{z} \sum{}' \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right]$$

O somatório é feito sobre todos os períodos $\Omega = \omega_1 n + \omega_2 m$ e o sinal (‘) sobre o somatório indica que está sendo desconsiderado o caso quando $m=n=0$. Esta função é analítica, portanto suas partes real e imaginária são harmônicas (para mais detalhes consulte MARKUSHEVICH, 1970).

Consideremos agora a função complexa $f(z)$, com $z = y_1 + iy_2$, definida como:

$$f(z) = a_1\left[\xi(z) - \pi z\right] + \sum_{k=3}^{\infty}{}^{0} a_k \frac{\xi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \tag{7}$$

onde o símbolo (º) sobre o somatório indica que estamos tomando os valores ímpares do índice k.

Esta função é periódica e suas partes real e imaginária são harmônicas. Por estas propriedades vamos supor que N_1 e N_2 são respectivamente a parte real e a parte imaginária de $f(z)$. Então, expandindo (7) em série de Laurent em torno de $z=0$, fazendo $z = re^{i\theta}$ e separando suas partes real e imaginária, temos que:

$$N_1(z) = \sum_{l=1}^{\infty}{}^{0} \left[-\pi a_1 \delta_{1l} + a_l r^{-2l} + \sum_{k=1}^{\infty}{}^{0} a_k \eta_{kl} \right] r^l \cos(l\theta) \tag{8}$$

$$N_2(z) = \sum_{l=1}^{\infty}{}^{0} \left[-\pi a_1 \delta_{1l} - a_l r^{-2l} + \sum_{k=1}^{\infty}{}^{0} a_k \eta_{kl} \right] r^l \sin(l\theta) \tag{9}$$

onde $\eta_{kl} = -C^{l}_{k+l-1} \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m+in)^{k+l}}$ e a_k são coeficientes a serem determinados.

Fazendo $p=1$ em (5) temos que:

$$\frac{\partial N_1}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial N_1}{\partial y_2} n_2 = -n_1$$

Note que $n_1 = \frac{1}{r}\frac{dy_2}{d\theta}$ e $n_2 = -\frac{1}{r}\frac{dy_1}{d\theta}$, substituindo na expressão acima, fazendo $N_1 = \mathrm{Re}\{f(z)\}$ e aplicando as equações de D'Alembert-Euler, chega-se em $\frac{d}{d\theta}\left[\mathrm{Im}\{f(z)\}\right] = -r\cos\theta$. Após uma série de operações sobre a igualdade acima, chega-se ao seguinte sistema infinito:

$$a_l^{(1)} = r^{2l}\left[\sum_{k=1}^{\infty}{}^{0} a_k \eta_{kl} - \delta_{1l}(\pi a_1 - 1)\right] \tag{10}$$

onde $a_l^{(1)}$ representa o sistema infinito de coeficientes para $p=1$.

De maneira análoga, chega-se ao sistema $a_l^{(2)}$, utilizando-se N_2 da (9).

$$a_l^{(2)} = r^{2l}\left[\delta_{1l}(\pi a_1 - 1) - \sum_{k=1}^{\infty}{}^{0} a_k \eta_{kl}\right] \tag{11}$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Fazendo $p=1$ em (1), usando (8) e fazendo $l=1$ em (10), tem-se que:

$$\hat{a}_{11} = k(1 - 2\pi a_1^{(1)})$$

E fazendo $p=2$ em (1), usando (9) e fazendo $l=1$ em (11), tem-se que:

$$\hat{a}_{12} = \hat{a}_{21} = 0,\ \hat{a}_{22} = k(1 - 2\pi a_1^{(2)})$$

Em resumo:

$$\hat{a}_{jp} = \begin{bmatrix} k(1-2\pi a_1^{(1)}) & 0 & 0 \\ 0 & k(1-2\pi a_1^{(2)}) & 0 \\ 0 & 0 & k(1-\pi r^2) \end{bmatrix}$$

Portanto o método é eficiente para encontrar os coeficientes efetivos do problema homogeneizado.

4. CONCLUSÕES

O Método de Homogeneização Assintótica mostra-se como uma boa alternativa ao problema de rápida oscilação nos coeficientes das equações que modelam o problema, tornando mais práticos o cálculo das propriedades efetivas do compósito e a implementação numérica para se obter a solução.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media**. Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 1989.

MARKUSHEVICH, A. **Teoría de las Funciones Analíticas** (Tomo I & II). Moscow: Editorial Mir, 1970.

SILVA, U.P. **Um estudo do método de homogeneização assimptótica visando aplicações em estruturas ósseas**. 2009. Dissertação (Mestrado em Bioengenharia) – Programa de Pós-Graduação Interunidades em Bioengenharia EESC – FMRP – IQSC, Universidade de São Paulo.