HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA DE UM PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO PARA A EQUAÇÃO DO CALOR ESTACIONÁRIA UNIDIMENSIONAL COM COEFICIENTES DESCONTÍNUOS E PERIÓDICOS

LARISSA NUNES MEIRELLES DA LUZ[1]; LESLIE D. PÉREZ FERNÁNDEZ [2]; JULIÁN BRAVO CASTILLERO[3]

[1] *Aluna da Licenciatura em Matemática, Instituto de Física e Matemática (IFM), Universidade Federal de Pelotas (UFPel) – larissa.meirelles@hotmail.com*
[2] *Professor do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat-IFM-UFPel) – leslie.fernandez@edu.br*
[3] *Pesquisador Visitante Especial no PPGMMat (CAPES nº 88881.030424/2013-01), Professor do Departamento de Matemática, Faculdade de Matemática e Computação, Universidade de Havana, Cuba – jbravo@matco.uh.cu*

1. INTRODUÇÃO

Compósitos são constituídos por fases distintas indissoluvelmente unidas e podem ser encontrados na natureza ou fabricados para melhorar as propriedades individuais de seus componentes para uma determinada aplicação. Por exemplo, compósitos com reforços fibrosos são muito utilizados em diversos setores industriais, como o automobilístico, aeronáutico, de construção civil, desportivo, eletroeletrônico, de construção de máquinas e de equipamentos médicos.

A determinação das propriedades globais ou efetivas de compósitos mediante métodos matemáticos serve de orientação na busca experimental de novos materiais com as propriedades ótimas desejadas. Em muitos casos estes materiais possuem uma estrutura periódica, ou seja, são formados por elementos recorrentes. Esta recorrência assegura a existência de um elemento representativo chamado de célula básica que reúne todas as propriedades físicas e geométricas do compósito de interesse e possibilita o emprego de modelos matemáticos com maior eficiência. O estudo numérico direto dos problemas correspondentes, cujas equações têm coeficientes rapidamente oscilantes, não fornece expressões fechadas para as soluções destes sistemas e requer malhas extremamente refinadas que dificultam a sua aplicação devido ao alto custo computacional.

Os métodos de homogeneização matemática permitem encontrar com grande precisão e rigor as propriedades efetivas de um material composto a partir das propriedades físicas e geométricas de seus componentes. Em particular, o Método de Homogeneização Assintótica (MHA - BAKHLOV; PANASENKO, 1989), é utilizado para encontrar os coeficientes que representam as propriedades efetivas de um meio com estrutura periódica. Este consiste na busca da solução do problema na forma de uma expansão assintótica das variáveis de interesse em termos de séries de potência de um parâmetro geométrico ε, $0 < \varepsilon \ll 1$, dado pela razão entre o comprimento característico da célula básica do compósito por um comprimento característico do compósito.

Para cada ε fixo, consideramos o seguinte problema de valores de contorno para a equação de calor estacionária com campo de temperatura u^ε:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[a^\varepsilon(x)\dfrac{du^\varepsilon}{dx}\right] = f, \ x \in (0,1)\backslash\Gamma^\varepsilon \\ [\![u^\varepsilon]\!]_{x\in\Gamma^\varepsilon} = 0 \\ \left[\!\!\left[a^\varepsilon(x)\dfrac{du^\varepsilon}{dx}\right]\!\!\right]_{x\in\Gamma^\varepsilon} = 0 \\ u^\varepsilon = 0, \ x \in \{0,1\} \end{cases}, \qquad (1)$$

onde $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$ é uma função ε-periódica, continuamente diferenciável por partes, positiva e limitada que representa a condutividade térmica; f é a fonte de calor; Γ^ε é o conjunto de pontos de descontinuidades de $a^\varepsilon(x)$; $[\![\cdot]\!]_{\Gamma^\varepsilon}$ representa o salto ao redor de cada descontinuidade de $a^\varepsilon(x)$, de maneira que as condições $(1)_{2,3}$, chamadas de contacto perfeito, impõem a continuidade da temperatura u^ε e do fluxo de calor $a^\varepsilon(x)\frac{du^\varepsilon}{dx}$ nestes pontos.

Objetivo deste trabalho é resolver analiticamente o problema (1) pelo MHA.

Este trabalho é a primeira incursão da autora no estudo do MHA, e de seus aspectos matemáticas relevantes, necessárias para futuras aplicações em problemas multidimensionais.

2. METODOLOGIA

O MHA garante que a solução do problema original (1) converge para a solução do problema homogeneizado quando o parâmetro geométrico tende a zero, assumindo uma solução na forma de uma série assintótica em duas escalas (x e $y = x/\varepsilon$) em potências de ε chamada solução assintótica formal, originando uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes $u_k(x,y)$ das potências de ε, continuamente diferenciáveis em x e y, e 1-periódicos em y. Os problemas para os dois primeiros termos da assintótica são os chamados problemas homogeneizado e local, respectivamente. O lema a seguir garante a existência de soluções u_k 1-periódicas da sequência de problemas:

Lema (BAKHLOV; PANASENKO, 1989): Seja $F(y)$ diferenciável e $a(y)$ diferenciável por partes, 1-periódica, positiva e limitada. A condição necessária e suficiente para que a solução 1-periódica equação $LN = F$, com o operador diferencial $L(\cdot) = \frac{d}{dy}\left(a(y)\frac{d(\cdot)}{dy}\right)$, exista é que $\langle F(y)\rangle \equiv \int_0^1 f(y)dy = 0$, onde $\langle\cdot\rangle$ é o operador do valor médio. ■

Consideramos a seguinte expansão assintótica da solução do problema:

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x,\varepsilon) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y), y = x/\varepsilon.$$

Na substituição de $u^{(2)}$ no problema (1), utilizamos a regra da cadeia:

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} \approx \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}$$

A partir daqui, x e y consideram-se independentes.

Agrupando por potências de ε o resultado da substituição em $(1)_1$ obtém-se a igualdade assintótica

$$\varepsilon^{-2}\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] + \varepsilon^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]\right\}$$
$$+ \varepsilon^0\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right] - f\right\} = O(\varepsilon)$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de ε^{-2}, ε^{-1} e ε^0 devem ser nulos, de onde:

$$\varepsilon^{-2}: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] = 0$$

$$\varepsilon^{-1}: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]$$

$$\varepsilon^0: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[a(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right] + f$$

Estas equações são complementadas com as condições de contacto que resultam de substituir $u^{(2)}$ em $(1)_{2,3}$ e condições para garantir a unicidade.

De aplicar o Lema na equação para ε^{-2} segue que existe u_0 solução 1-periódica. Logo, integrando com relação a y e após aplicando o operador $\langle\cdot\rangle$ em ambos os lados da igualdade levando em conta a 1-periodicidade de u_0 e a positividade de $a(y)$, temos:

$$0 = \langle \partial u_0/\partial y\rangle = k(x)\langle a^{-1}(y)\rangle \Rightarrow\ k(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \Rightarrow u_0 = u_0(x)$$

Assim, utilizando o resultado acima, a equação para ε^{-1} modifica-se em

$$\varepsilon^{-1}: \frac{\partial}{\partial y}\left[a(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right] = -\frac{da}{dy}\frac{du_0}{dx}$$

De aplicar o Lema nesta equação para ε^{-1} levando em conta a 1-periodicidade de $a(y)$, segue que existe u_1 solução 1-periódica. Logo, integrando com relação a y e aplicando o operador $\langle\cdot\rangle$ levando em conta a 1-periodicidade de u_1, temos:

$$\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{k(x)}{a(y)} \Rightarrow \frac{du_0}{dx} = k(x)\langle a^{-1}(y)\rangle \Rightarrow k(x) = \hat{a}\frac{du_0}{dx}, \hat{a} = \langle a^{-1}(y)\rangle^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial y} = \left(\frac{\hat{a}}{a(y)} - 1\right)\frac{du_0}{dx} \Rightarrow u_1(x,y) = N_1(y)\frac{du_0}{dx}, N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1\right) ds$$

onde $\hat{a}$ é o chamado coeficiente efetivo. Especificamente, a função 1-periódica $N_1(y)$ é a solução do problema sobre a célula básica

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dy}\left[a(y) + a\,(y)\dfrac{dN_1}{dy}\right] = 0, y \in (0,1)\backslash\Gamma \\ [\![N_1(y)]\!]_{y\in\Gamma} = 0 \\ \left[\!\!\left[a(y)\dfrac{dN_1}{dy}\right]\!\!\right]_{y\in\Gamma} = -[\![a(y)]\!]_{y\in\Gamma} \\ N_1(0) = N_1(1) \\ N_1(0) = 0 \end{cases}$$

onde Γ é o conjunto de pontos de descontinuidade de $a(y)$ na célula básica.

De aplicar o Lema na equação para ε^0 segue que a condição necessária e suficiente para que exista u_2 solução 1-periódica é a equação do problema homogeneizado

$$\begin{cases} \hat{a}\dfrac{d^2u_0}{dx^2} = f, x \in (0,1) \\ u_0 = 0, x \in \{0,1\} \end{cases}$$

Em muitas situações é suficiente considerar a expansão assintótica de primeira ordem $u^{(1)}(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1(x/\varepsilon)u_0'(x)$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir, apresentamos um exemplo ilustrativo do fato de que $u^\varepsilon \to u_0$ e $u^{(1)} \to u_0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Sejam o sumidouro unitário uniformemente distribuído $f(x) = -1$, e a condutividade térmica $a(y) = \begin{cases} a_1, y \in (0, 0.5-\delta) \cup (0.5+\delta, 1) \\ a_2, y \in (0.5-\delta, 0.5+\delta) \end{cases}$ com $a_r > 0, r = 1,2,$ e $\delta \in (0, 0.5)$. Este caso representa um compósito condutivo bifásico com fases constituintes homogêneas. Aqui $\Gamma = \{0.5-\delta, 0.5+\delta\}$. A condutividade efetiva correspondente é $\hat{a} = \langle a^{-1}\rangle^{-1} = (c_1 a_1^{-1} + c_2 a_2^{-1})^{-1}$ onde $c_2 = 2\delta = 1 - c_1$ com c_r a concentração da fase r.

A solução do problema homogeneizado é $u_0(x) = x(1-x)/2\hat{a}$, enquanto a solução do problema local é

$$N_1(y) = \begin{cases} Ay, y \in (0{,}0.5 - \delta) \\ \left(\frac{a_1}{a_2}(A+1) - 1\right) y + B, y \in (0.5 - \delta, 0.5 + \delta) \\ A(y-1), y \in (0.5 + \delta, 1) \end{cases}$$

onde A e B são obtidos das condições de contacto. De u_0 e N_1 dados acima se obtém a solução assintótica $u^{(1)}$ do problema original. A solução exata u^{ε} do problema original se obtém de maneira análoga a N_1, ou seja, resolvendo em cada intervalo e obtendo as constantes de integração a partir das condições de contacto e de contorno. Os resultados apresentados na figura a seguir, foram obtidos considerando $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, e $\delta = 0.25$.

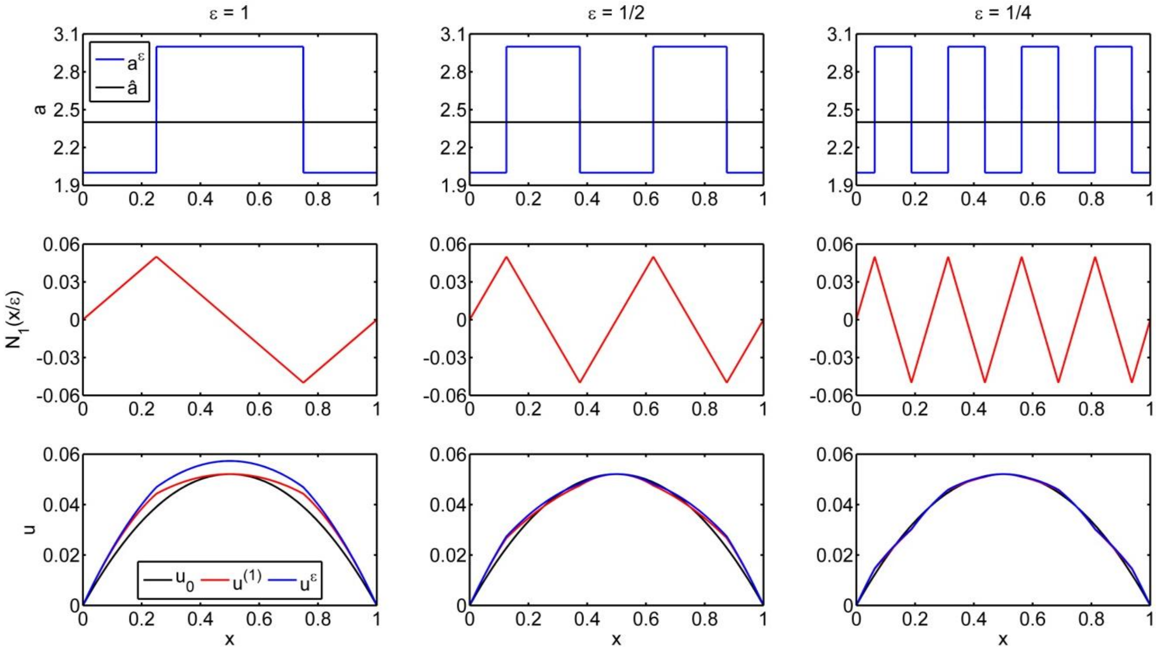

Figura 1. Coeficientes constitutivo a^{ε} (ε-periódico e rapidamente oscilante para ε pequeno) e efetivo $\hat{a}$. Solução do problema local correspondente para valores decrescentes de ε (evidenciando sua periodicidade) e as correspondentes soluções exata u^{ε} e assintótica formal $u^{(1)}$ do problema original, e do problema homogeneizado u_0 (evidenciando a proximidade entre elas quando ε decresce).

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho aplicou-se o método de homogeneização assintótica a um problema unidimensional, e ilustrou-se a proximidade entre a soluções exata u^{ε} e assintótica formal $u^{(1)}$ e a solução u_0 do problema homogeneizado. Através das curvas mostradas na Figura 1 obtidas a partir do exemplo ilustra-se que método é realmente eficaz, pelo fato de que $u^{\varepsilon} \to u_0$ e $u^{(1)} \to u_0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Este trabalho é uma introdução para proporcionar a autora a adquirir pré-requisitos necessários para dar seguimento ao estudo do método de homogeneização assintótica. A continuidade da pesquisa estará em obter conhecimento no caso unidimensional para então estudar sobre problemas bidimensionais e tridimensionais.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.