INTRODUÇÃO AO MÉTODO DA HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MEIOS ELÁSTICOS LINEARES

BRUNA DA SILVA LEITZKE[1]; JULIÁN BRAVO CASTILLERO[2];
LESLIE D. P. FERNÁNDEZ[3]; VALDECIR BOTTEGA[4]

[1]Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat), Instituto de Física e Matemática (IFM), Universidade Federal de Pelotas (UFPel) Pelotas – brunaleitzke@hotmail.com;
[2]Pesquisador Visitante Especial no PPGMMAT (CAPES nº 88881.030424/2013-01), Universidade de Havana, Cuba – jbravo@matcom.uh.cu;
[3]Professor do Departamento de Matemática e Estatística, IFM, UFPel - leslie.fernandez@ufpel.edu.br;
[4]Professor do Departamento de Matemática e Estatística, IFM, UFPel – vldcirbo@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos são constituídos de dois ou mais sólidos homogêneos que possuem regiões e propriedades distintas. Caracterizando-os como materiais heterogêneos. A homogeneização visa determinar as propriedades mecânicas do meio homogêneo que é equivalente àquele meio micro estrutural periódico e regular estabelecido para cada elemento finito da estrutura (PORTO, 2006). Onde a estrutura é dita periódica se sua microestrutura pode ser representada por uma célula unitária Y, chamada célula básica, que se repete ao longo de todo o corpo.

O Método de Homogeneização Assintótica (MHA) é uma forma de estudar esses materiais. Com esse método se busca uma transformação de um problema sobre um meio heterogêneo (Problema Original) para um equivalente sobre o meio homogêneo (Problema Homogeneizado) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

A partir do problema de valor de contorno (PVC) dado e da solução assintótica construída vamos determinar o campo de deslocamento $u_k^\varepsilon(x,y)$, com u_k^ε sendo as componentes do vetor deslocamento u no espaço. E então será feita a proximidade entre o Problema Original e o Problema Homogeneizado.

2. METODOLOGIA

Vamos considerar um PVC correspondente ao meio heterogêneo periódico e regular, onde $u_k^\varepsilon(x,y)$ é o vetor deslocamento no sistema de coordenadas cartesianas. Se, neste caso o PVC tem caráter rapidamente oscilante, o mesmo é chamado de Problema Original e é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l}\right) + f_i^\varepsilon = 0, x \in \Omega \tag{1}$$

$$u_k^\varepsilon = 0, x \in \partial\Omega \tag{2}$$

com C_{ijkl} sendo as componentes do tensor de 4ª ordem de rigidez elástica, simétrico, definido positivo e Y-periódico, onde $Y = [0,1]^3$ é a célula básica e f_i funções continuas em Ω com $0 < \varepsilon \ll 1$.

A partir desse problema, se tem como solução uma série assintótica em potências de um parâmetro pequeno ε. Suponhamos que essa solução seja da forma:

$$u_k^\varepsilon(x,y) \approx u_k^2(x,y) = \varepsilon^0 u_k^0(x,y) + \varepsilon^1 u_k^1(x,y) + \varepsilon^2 u_k^2(x,y) \tag{3}$$

onde $u_k^h(x,y)$, com $h = 0,1,2$, são Y-periódicas com relação a y.

Os coeficientes efetivos do problema dependem de uma variável local (dita macroscópica ou lenta) x e de uma variável global (dita microscópica ou rápida) y. E temos a seguinte relação $y = \frac{x}{\varepsilon}$, onde ε corresponde a medida da razão entre as duas dimensões, em Ω e em Y. Assim, a solução do PVC original converge para a solução do Problema Homogeneizado quando ε tende a zero (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Além disso, os coeficientes são simétricos e positivos definidos, ou seja, respectivamente temos:

$$C_{ijkl}(y) = C_{jikl}(y) = C_{ijlk}(y) = C_{klij}(y), \forall\, y \in \mathrm{Y} \quad (4)$$

$$\exists K > 0, \forall\, y \in \mathrm{Y}: C_{ijkl}(y)\eta_{ij}\eta_{kl} \geq K\eta_{ij}\eta_{ij},\ \forall\, \eta_{il} \text{ simétrico} \quad (5)$$

Com isso, vamos encontrar os $u_k^h(x,y)$, com $h = 0,1,2,\ldots$, para determinar nossa solução e, consequentemente, verificar a relação de proximidade entre os Problemas Original e Homogeneizado. Ao longo dos cálculos serão utilizados o Teorema da Divergência *(ANTON, 2007)* e o Teorema de Weierstrass *(BORTOLOSSI, 2003)* conhecidos, e ainda, o Princípio de Máximo *(BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) e* o Lema 1 dado abaixo.

Lema 1 (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989): Sejam $F = F_i(y)$ e $C = C_{ijkl}(y)$ funções suaves e Y-periódicas com $C_{ijkl}(y)$ sendo um tensor de elasticidade simétrico e positivo definido. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução Y-periódica $N = N_i(y)$ da equação $L_{yy}N = F$ é que $\langle F_i(y)\rangle \equiv \frac{1}{|Y|}\int_Y F_i(y)dy = 0$, onde $L_{yy} = \frac{d}{dy_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{d}{dy_l}\right)$. Além disso, $N = \widetilde{N} + C$, onde $\langle\widetilde{N}\rangle = 0$ e C é um vetor constante. Aqui o operador média é definido como $\langle g(x,y)\rangle = \frac{1}{|Y|}\int_Y g(x,y)dy$, com $|Y|$ sendo o volume de Y.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dadas as Equações (1)-(2), temos que o PVC representa uma família de problemas para os quais a solução existe e é única para cada valor do parâmetro ε (PRADO, 2010). Considerando agora a possível solução assintótica em (3) e derivando parcialmente ambos os lados em relação à x teremos:

$$\frac{\partial u_k^\varepsilon(x,y)}{\partial x_l} \approx \frac{\partial u_k^2(x,y)}{\partial x_l} = \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \varepsilon\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \varepsilon^2\frac{\partial u_k^2}{\partial x_l} + \varepsilon\frac{\partial u_k^2}{\partial x_l} \quad (6)$$

Definindo o operador

$$L_{\alpha\beta}\varphi = \frac{\partial}{\alpha_j}\left(C_{ijkl}(y)\frac{\varphi}{\beta_l}\right) \quad (7)$$

E agora substituindo (6) em (1) e derivando em relação a x:

$$\varepsilon^{-2}\left(L_{yy}u_k^0\right) + \varepsilon^{-1}\left(L_{yx}u_k^0 + L_{xy}u_k^0 + L_{yy}u_k^1\right) + \varepsilon^0\left(L_{xx}u_k^0 + L_{yx}u_k^1 + L_{xy}u_k^1 + L_{yy}u_k^2\right) + f = O(\varepsilon) \quad (8)$$

Assim, aplicando a definição de solução assintótica formal encontramos um sistema de equações para obtermos $u_h^\varepsilon(x,y)$, com $h = 0,1,2,\ldots$ dado por:

$$L_{yy}u_k^0 = 0 \quad (9)$$

$$L_{yx}u_k^0 + L_{xy}u_k^0 + L_{yy}u_k^1 = 0 \quad (10)$$

$$L_{xx}u_k^0 + L_{yx}u_k^1 + L_{xy}u_k^1 + L_{yy}u_k^2 = 0 \quad (11)$$

Aplicando o Lema 1 em (9) verificamos que o operador média da fonte é nulo, logo existe solução. E pela linearidade do operador temos que:

$$u_k^0(x,y) = v_k(x) \quad (12)$$

A partir da equação (10) e da solução (12) temos

$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_l}\right)$. Supondo, por separação de variáveis, $u_k^1(x,y) = N_{kpq}(y)M_{pq}(x)$ vamos supor $M_{pq}(x) = \frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q}$. Chegando assim na igualdade:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}\frac{\partial(N_{kpq})}{\partial y_l} + C_{ijpq}\right)\frac{\partial v_p}{\partial x_q} = 0 \quad (13)$$

E assim, para todo $y \in Y$ e para todo $x \in \Omega$ temos que $N_{kpq}(y)$ é solução Y -periódica do Problema Local sobre $y \in Y = [0,1]^3$, para cada p e q em $\{1,2,3\}$, abaixo:

$$L_{pq} = \frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}\frac{\partial(N_{kpq})}{\partial y_l} + C_{ijpq}\right) = 0 \quad (14)$$

Logo, pelo Lema 1 o P.L. é bem posto e temos que:

$$u_k^1(x,y) = N_{kpq}(y)\frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q} \quad (15)$$

Agora, na igualdade dada em (11) vamos aplicar o Lema 1, para cada $x \in \Omega$. Chegando na seguinte expressão:

$$\langle -L_{xx}u_k^0 - L_{yx}u_k^1 - L_{xy}u_k^1 - f_i(x)\rangle = \langle C_{ijpq} + \frac{\partial(C_{ilkj}N_{kpq})}{\partial y_l} + C_{ijkl}\frac{\partial N_{kpq}}{\partial y_l}\rangle\frac{\partial^2 v_p}{\partial x_j \partial x_q} = -f_i(x) \quad (16)$$

Como $C_{ijkl}(y)$ e $N_{kpq}(y)$ são Y-periódicas temos que $\langle\frac{\partial(C_{ilkj}N_{kpq})}{\partial y_l}\rangle = 0$. Então, chegamos ao Problema Homogeneizado dado por:

$$\hat{C}_{ijpq}\frac{\partial^2 v_p}{\partial x_j \partial x_q} + f_i(x) = 0, x \in \Omega \quad (17)$$

$$u_k = 0, x \in \partial\Omega \quad (18)$$

onde $\hat{C}_{ijpq}$ são as componentes do tensor efetivo definido por:

$$\hat{C}_{ijpq} = \langle C_{ijpq} + C_{ijkl}\frac{\partial N_{kpq}}{\partial y_l}\rangle \quad (19)$$

Assim, $\hat{C}_{ijpq}$ é simétrico e positivo definido, onde é possível a demonstração a partir de (4) e (5). E ainda, como o material é anisotrópico, a matriz de coeficientes efetivos possui 21 componentes independentes.

Para resolver (11) vamos assumir por separação de variáveis que $u_k^2(x,y) = N'_{krpq}(y)M'_{prq}(x)$, onde por conveniência supomos $M'_{prq}(x) = \frac{\partial^2 v_p}{\partial x_r \partial x_q}$. Assim, chegamos em:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(C_{ijkl}\frac{\partial N'_{krpq}(y)}{\partial y_l}\right)\frac{\partial^2 v_p}{\partial x_r \partial x_q} = \mathcal{F}_{irpq}\frac{\partial^2 v_p}{\partial x_r \partial x_q} \quad (20)$$

com $\mathcal{F}_{irpq} = -C_{irpq} - \frac{\partial(C_{ijkr}N_{kpq})}{\partial y_j} - C_{irkl}\frac{\partial N_{kpq}}{\partial y_l} + \hat{C}_{irpq}$ (21)

Simplificando a expressão em (20) chegamos em $L_{yy}N'_{krpq}(y) = \mathcal{F}_{irpq}$. Pelo Lema 1 e pelo Teorema da Divergência, temos que o problema é bem posto, logo:

$$u_k^2(x,y) = N'_{krpq}(y)\frac{\partial^2 v_p(x)}{\partial x_r \partial x_q} \quad (22)$$

Portanto, chegamos à seguinte Solução Assintótica:

$$u_k^\varepsilon(x,y) \approx u_k^{(2)}(x,y) = v_k(x) + \varepsilon^1 N_{kpq}(y)\frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q} + \varepsilon^2 N'_{krpq}(y)\frac{\partial^2 v_p(x)}{\partial x_r \partial x_q} \quad (23)$$

Por fim, quando $\varepsilon \to 0$ a solução do Problema Original converge pra solução do Problema Homogeneizado, então vamos mostrar que a aproximação entre $u_k^\varepsilon(x,y)$ e $u_k^0(x,y)$ é de ordem ε. Para isso, consideremos o seguinte Problema Auxiliar:

$$L^\varepsilon u_k^{(1)} = -f_i^k(x) + \varepsilon F(x,\varepsilon), x \in \Omega \quad (24)$$

$$u_k^\varepsilon = 0, x \in \partial\Omega \tag{25}$$

Fazendo os cálculos, utilizando as soluções encontradas e as hipóteses, temos que

$$L^\varepsilon u_k^{(1)} = -f_i(x) + \varepsilon C_{ijkl} N_{kpq} \frac{\partial^3 v_p}{\partial x_j \partial x_l \partial x_q} \tag{26}$$

Logo, de (24) e (26) temos $F(x,\varepsilon) = C_{ijkl} N_{kpq} \frac{\partial^3 v_p}{\partial x_j \partial x_l \partial x_q}$. Aplicando o Lema de Weierstrass obtemos que:

$$\|F(x,\varepsilon)\| = máx_{x\in\Omega}|F(x,\varepsilon)| \leq A = A\varepsilon^0 \Rightarrow F(x,\varepsilon) = O(1) \tag{27}$$

E assim,

$$L^\varepsilon u_k^{(1)} = -f_i(x) + \varepsilon O(1) \Rightarrow L^\varepsilon u_k^{(1)} = -f_i(x) + O(\varepsilon) \tag{28}$$

Agora, como $u_k^{(1)} - u_k^0 = \varepsilon N_{kpq}(y) \frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q}$, pelo Lema de Weierstrass e pelo Princípio do Máximo, considerando constantes reais A', A, B e G, temos:

$$\left\|u_k^\varepsilon - u_k^{(1)}\right\|_{C(\bar{\Omega})} \leq A'\|F(x,\varepsilon)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq A\varepsilon \text{ e } \left\|u_k^{(1)} - u_k^0\right\|_{C(\bar{\Omega})} = máx_{x\in\Omega}\left|u_k^{(1)} - u_k^0\right|_{C(\bar{\Omega})} \leq B\varepsilon$$

Logo:

$$\left\|u_k^\varepsilon - u_k^0\right\|_{C(\bar{\Omega})} = \left\|u_k^\varepsilon - u_k^{(1)} + u_k^{(1)} + u_k^0\right\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \left\|u_k^\varepsilon - u_k^{(1)}\right\|_{C(\bar{\Omega})} + \left\|u_k^{(1)} - u_k^0\right\|_{C(\bar{\Omega})}$$
$$\leq A\varepsilon + B\varepsilon = G\varepsilon$$

E portanto,

$$\left\|u_k^\varepsilon - u_k^0\right\|_{C(\bar{\Omega})} = O(\varepsilon) \tag{29}$$

4. CONCLUSÕES

O trabalho apresenta todo o desenvolvimento para resolver o problema sobre materiais compósitos elásticos lineares com coeficientes diferenciáveis. Dessa forma, é possível resolver os casos particulares para este caso, como meios laminados, materiais fibrosos, etc. E ainda, se o material é isotrópico encontramos para a matriz de coeficientes efetivos cinco componentes linearmente independentes.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H.: **Cálculo, Um Novo Horizonte** - Vol. 2, 6ª edição. Editora Bookman, 2000.

BAKHVALOV, N.S.; PANASENKO, G.P. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

PORTO, E.C.B. **Método da homogeneização aplicado à otimização estrutural topológica**. 2006. 179f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Estadual de Campinas.

PRADO, E. B. T.; ROCHA, F. C.; ROCHA, G. L.; MATOS, L.; SAMPAIO, M. S. M.; SILVA, U. P. **O método de homogeneização assintótica aplicado na obtenção dos coeficientes efetivos de um compósito elástico linear**. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, v. 12, n. 55, p. 67-86, 2010. **Edição Especial "Método de Homogeneização Assintótica"**.